

測定基礎編

金属の体積と密度 (測定基礎1: 最確値と誤差)

[目的]

長さの測定に利用するノギスとマイクロメーターについて、扱い方やの数値の読み取り方を習得する

To master how to handle and read values of lengths by a vernier caliper and a micrometer

測定の正確さと精密さの違いやそれらの誤差との関わり方について理解する

To distinguish the accuracy and precision of measurements and understand their relation to the error of measurements

ひとつの物理量をくり返し測定したとき、その結果から最確値と誤差を求めて記述する方法を習得する

To master how to obtain and describe the most probable values and the errors from repetitive measurements of a physical quantity

複数の測定値から別の量を計算で求めるときに伝播する誤差を評価する方法を習得する

To master how to evaluate a propagation error for a value calculated from several measured quantities

注意 測定結果を文献値等と比較し、その差を「誤差」と呼ぶのは正しくない。実験の条件によってはその測定で得られるべき真の値は文献値と異なるのが普通である。そして、この「真の値」は実験の工夫と努力によって近づくことはできても決して得ることはできない値である。真の値が文献値と完全に一致するという確証はない。そして、測定結果と真の値との「ずれ」(正確さ)を「誤差」と呼びたいところであるが、真の値が分からないために測定結果がもたらす「ばらつき」(精密さ)をもってその「誤差」を定義する。

[理論(1) 誤差の分類とその扱い方]

誤差は、その原因の性質から大きくふたつに分けると、系統誤差と偶然誤差に分類される。**系統誤差** (systematic error) は**正確さ** (accuracy), つまり「真の値からのずれ」にかかわるもので、理想的にはその原因が制御可能である。計算に用いた理論がもたらす**理論誤差**, 使用した測定機器のがたつき等で規定される**機械誤差**, および、測定者が偏った読み取りをするなど個人の習性がもたらす**個人誤差**が含まれる。これらは十分な予備実験によって正しい理論に置き換えたり、必要な精度の機器を用いたり、あるいは客観的な反省によって習性が改善されれば除去することが可能である。あるいは、測定結果に対して行われる考察の中で、結果が真の値からずれた可能性を系統誤差の存在として議論し、将来の測定のための参考となる意見をすることも重要な科学的態度であるといえる。個人が偶発的に犯した失敗は測定をくり返せば特定でき、これを誤差に含むことはできない。

一方、**偶然誤差** (random error) は測定の精密さ (precision), つまり「真の値のまわりのばらつき」にかかわるもので、測定時の偶然に原因があり避けることはできない。偶然誤差に対する科学的対処法は統計処

理として確立しているので、その方法を理解し、習得する必要がある。一般的には多数回測定したときの測定値はその平均値を中心に正規分布に従うばらつきかたをするものと仮定できる。このとき、平均値の前後にある幅を考え、その中に真の値が存在する確率が例えば 0.5 になる (信頼係数が 50% である) というように、何らかの確率と対応する幅を、その確率に対応する偶然誤差と呼ぶ。特に、その幅に収まる確率が 50% となるものを確率誤差と呼ぶ。

[理論 (2) 偶然誤差・確率誤差の計算と記述の方法]

○ 物理量 x に対する n 個の測定値を x_1, x_2, \dots, x_n とし、これらから結論される誤差付きの推定値を

$$\bar{x} \pm \Delta\bar{x}$$

と表す。ここで、 \bar{x} は真の値の推定値であり、重み付けがなければ算術平均

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

で与えられる。一般にはこれが最確値を与える。また、 n 個の測定値の分布に対する標準偏差は

$$\sigma_{SD} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}$$

で定義されるが、 n 個の測定をくり返し行えばその平均値 \bar{x} も分布する。平均値の分布の標準偏差は元の測定値の標準偏差の $\frac{1}{\sqrt{n}}$ になる。またサンプル数 n が多ければ分布はガウス分布 (正規分布) になるが、少なければ n に依存する形の分布 (スチューデントの t -分布) になる。さらに、信頼係数を 50% とするための補正を含めると、確率誤差は

$$\Delta\bar{x} = \frac{t_{50}(n)}{\sqrt{n}} \sigma_{SD}$$

により与えられる。ここで、 $t_{50}(n)$ は n 個の測定値に対するスチューデントの t -分布の係数で、たとえば

$$t_{50}(5) = 0.74, \quad t_{50}(10) = 0.70, \quad \dots, \quad t_{50}(\infty) = 0.67$$

である。

○ $\Delta\bar{x}$ の有効数字は 1 桁 (または 2 桁) である。 $\Delta\bar{x}$ の桁に \bar{x} の最小桁をそろえること。たとえば

$$\bar{x} = 1.2345, \quad \Delta\bar{x} = 0.06789 \text{ と計算されたときは, } x = 1.23 \pm 0.07$$

という表記にする。なぜならば、省かれた \bar{x} の下 2 桁 0.0045 や、 $\Delta\bar{x}$ の下 3 桁 0.00789 は、いずれも誤差の大きさ 0.07 より小さいので意味をもたないからである。

○ 機械誤差など他の原因による誤差が確率誤差を上回る場合は、誤差として前者をとる。

[理論 (3) 誤差の伝播]

測定された物理量が x, y, z, \dots であり、これから $f(x, y, z, \dots)$ の式にしたがって計算される値の誤差を考える。このとき場合、 f の誤差付きの推定値は最終的に $\bar{f} \pm \Delta\bar{f}$ とかける。ここで、 f の最確値 \bar{f} は各物理量の最確値 (一般には平均値) $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$ を使って計算したものであり、その誤差 $\Delta\bar{f}$ は以下のよう

$$\Delta\bar{f} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^2 (\Delta\bar{x})^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\right)^2 (\Delta\bar{y})^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)^2 (\Delta\bar{z})^2 + \dots}$$

測定値 x, y, z, \dots の誤差が $\Delta\bar{x}, \Delta\bar{y}, \Delta\bar{z}, \dots$ としてわかっている場合、 f の計算値にはこの誤差 $\Delta\bar{f}$ を添えて表す。

(例)円柱の体積測定の場合

円柱の直径を ϕ 、長さを l とすると、体積は $V = \pi(\phi/2)^2 l$ で与えられる。体積の誤差つき最確値を $\bar{V} \pm \Delta\bar{V}$ と表すと、

$$\bar{V} = \frac{\pi}{4} \bar{\phi}^2 \bar{l}, \quad \Delta\bar{V} = \sqrt{\left(\frac{\partial\bar{V}}{\partial\bar{\phi}}\right)^2 (\Delta\bar{\phi})^2 + \left(\frac{\partial\bar{V}}{\partial\bar{l}}\right)^2 (\Delta\bar{l})^2}$$

である。ここで

$$\frac{\partial\bar{V}}{\partial\bar{\phi}} = \frac{\pi}{4} 2\bar{\phi} \bar{l} = \frac{2\bar{V}}{\bar{\phi}}, \quad \frac{\partial\bar{V}}{\partial\bar{l}} = \frac{\pi}{4} \bar{\phi}^2 = \frac{\bar{V}}{\bar{l}}$$

であるから、

$$V = \bar{V} \left(1 \pm \frac{\Delta\bar{V}}{\bar{V}}\right)$$

と書けば、 $\frac{\Delta\bar{V}}{\bar{V}}$ は誤差の割合を表し、上式を整理すれば次式で求められることがわかる。

$$\frac{\Delta\bar{V}}{\bar{V}} = \sqrt{\left(\frac{2\Delta\bar{\phi}}{\bar{\phi}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\bar{l}}{\bar{l}}\right)^2}$$

また、物体の質量 M の誤差つき最確値を $\bar{M} \pm \Delta\bar{M}$ とすれば、物体の密度 ρ の誤差つき最確値 $\bar{\rho} \pm \Delta\bar{\rho} = \bar{\rho} \left(1 \pm \frac{\Delta\bar{\rho}}{\bar{\rho}}\right)$ は、

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\bar{M}} = \frac{1}{\bar{V}} = \frac{\bar{\rho}}{\bar{M}}, \quad \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\bar{V}} = -\frac{\bar{M}}{\bar{V}^2} = -\frac{\bar{\rho}}{\bar{V}}$$

より、

$$\frac{\Delta\bar{\rho}}{\bar{\rho}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\bar{M}}{\bar{M}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\bar{V}}{\bar{V}}\right)^2}$$

で求める。

○ 文献(理科年表など)による銅とアルミの密度はそれぞれ 8.93, 2.69 g/cm³ である。試料の体積を外形から評価すると実際より大きくなることもあり、本実験では各々 8.89, 2.63 g/cm³ が代表的な値である。

[理論(4) スチューデントの t 分布(の逆関数)の係数]

データ数 n 個で信頼係数 50% の t 係数 $t_{50}(n) = 0.74$ などの値は、信頼係数を小数で表して $p = 0.5$ などとおくと、Microsoft Excel や OpenOffice Calc などの表計算ソフトウェア上で関数 `tinv(a, f)` により取得が可能である。ただし、危険率 $a = 1 - p$ 、自由度 $f = n - 1$ を代入すること。たとえば、データ数 10 個で信頼係数 99% の t 係数は $t_{99}(10) = \text{tinv}(0.01, 9) = 3.25$ である。

[理論(5) 最小二乗法による最小二乗線¹の推定]

N 個からなるデータ (x_i, y_i) をグラフに描いた場合、 x, y の関係が $y = ax + b$ の直線にほぼ従うことがある。この時パラメーター a, b の値をどのように決定すれば良いかを考える。 a, b の値を変化させて、 $\Delta_i = y_i - ax_i - b$ (これを残差という) の二乗和 $S = \sum \Delta_i^2$ を最小にするように a, b の値を定める方法を **最小二乗法** という。残差の二乗和が最小になるのが $a = A, b = B$ のときであるとする、

$$0 = \frac{\partial S}{\partial a} = -\sum x_i \Delta_i \implies \sum x_i y_i = \left(\sum x_i^2\right) A + \left(\sum x_i\right) B$$
$$0 = \frac{\partial S}{\partial b} = -\sum \Delta_i \implies \sum y_i = \left(\sum x_i\right) A + NB$$

1 回帰直線ともいう

という連立方程式が成り立つ。これを解くと A, B の値は

$$D = N \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2$$

として

$$A = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{D}, \quad B = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i y_i \cdot \sum x_i}{D}$$

となる。さらに、パラメーターの値 A, B の誤差 (Δ_A, Δ_B) は計算によれば、最小になった残差の二乗和

$$S_m = \sum (y_i - Ax_i - B)^2$$

を用いて

$$\Delta_A = \sqrt{\frac{N \cdot S_m}{D(N-2)}}, \quad \Delta_B = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 \cdot S_m}{D \cdot (N-2)}}$$

と与えられる。

このようにして、データのばらつきから直線の「傾き a 」と「 y 切片 b 」は誤差付き最確値

$$a = A \pm \Delta_A, \quad b = B \pm \Delta_B$$

を得ることができる。グラフに $y = Ax + B$ の直線を記入すれば、ばらついているデータの真ん中を通る直線になっていることが確認できる。

[理論(6) [ノギスの副尺について]

1. 幅ゼロの物体をはさんだとき、「副尺 0.0」が主尺のゼロと一致することを確認する。同時に主尺の目盛線に一致する副尺の目盛線を探すと、10.0 である(▽位置)。

副尺の目盛は主尺の 3.9 cm を 20 分割しているの、ひと目盛(副尺上で 0.5)の幅は $a = \frac{3.9}{20}$ cm, これと主尺の 0.2 cm とのずれは $x = 0.2 - a = 0.2 - \frac{3.9}{20} = \frac{1}{200} = 0.005$ cm である。読み取りはこの量が最小単位となるので、ノギスの精度は ± 0.005 cm になる。

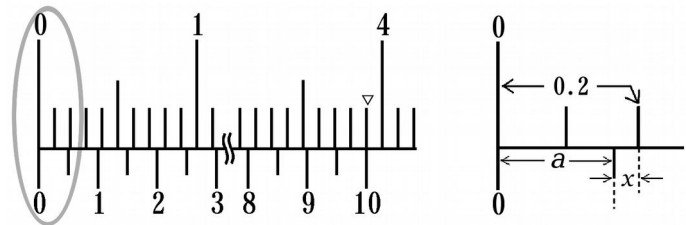


図 幅ゼロの物体をはさんだとき。右図は左図の丸で囲んだ部分の拡大。

2. ある物体をはさんだとき、「副尺 0.0」が主尺の 5.1 ~ 5.2 にある(▼位置)。同時に主尺の目盛線に一致する副尺の目盛線を探すと、4.0 である(▽位置)。これを 0.040 と読み替えて、 $5.1 + 0.040 = 5.140$ cm と読む。小数第三位は 0 あるいは 5 である。

物体の幅を表す▼位置を $M = M' + y$ とする。 $M' (= 5.1)$ は最小目盛までの読み、 y はそれ以下である。 y は目分量ではなく、副尺の読みで決める。主尺と目盛線が一致する▽の位置を副尺上で $S (= 4.0)$ であるとする。副尺上で 0, 0.5, 1.0, ..., S と進むにつれて、主尺と副尺の差は $y, y - x, \dots, 0$ と変化しているの、 $y = S \times 2x$ と書ける。

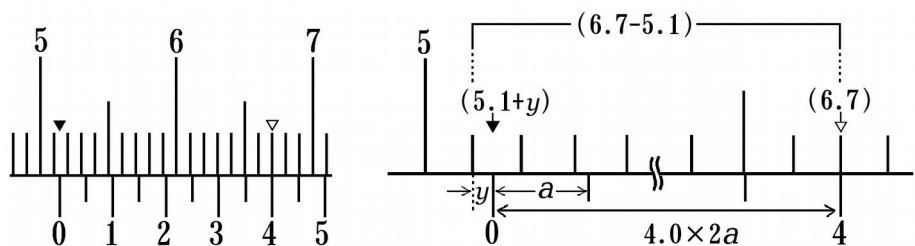


図 幅 51.40mm の物体をはさんだとき。

物理学基礎実験レポート 提出用表紙

タイトル

レポート提出者

物理実験番号 —
氏 名：

共同実験者氏名

実験年月日

実験条件（天候・気温・気圧・湿度）

● 受理時のコメント（評価者 ）

● 再提出時のリコメント（提出者）

● 再提出受理時のコメント（評価者 ）

	模範的	良い	努力を期待
表紙	<input type="checkbox"/> 必要なことがすべて掲載されている <input type="checkbox"/> 必要なコメントやルーブリック記載がある	<input type="checkbox"/> 実験内容に関わることはすべて書かれている	<input type="checkbox"/> 実験内容に関わることに記載漏れがある
目的・課題	<input type="checkbox"/> 課題や実験の意図がわかりやすく文章化されている <input type="checkbox"/> 特記事項	<input type="checkbox"/> 課題が与えられたまま書かれている	<input type="checkbox"/> 課題の記述に不足がある
原理・理論	<input type="checkbox"/> 関連する量の定義が簡素にわかりやすく示されている <input type="checkbox"/> 分析に使う式が考え方とともに簡素にわかりやすく示されている <input type="checkbox"/> 特記事項	<input type="checkbox"/> 関連する量の定義がすべてなされている <input type="checkbox"/> 分析に使う式が示されている	<input type="checkbox"/> 定義のかけている量がある <input type="checkbox"/> 重要な式が示されていない
装置・器具・試料	<input type="checkbox"/> 物品の情報に実験精度に関わる内容が記載されている <input type="checkbox"/> 器具の取り扱いについて、精度に関わる点を指摘している <input type="checkbox"/> 安全面についての説明がある <input type="checkbox"/> 器具の状態管理について協力したことが記載されている <input type="checkbox"/> 特記事項	<input type="checkbox"/> 実験を再現するために十分な物品の情報がある <input type="checkbox"/> 器具の取り扱いについて一般的に注意すべき点を示している	<input type="checkbox"/> 物品の情報に欠落がある
方法・手順	<input type="checkbox"/> すべての手順がわかりやすくまとめられている <input type="checkbox"/> 特記事項	<input type="checkbox"/> 手順が一通り記載されている	<input type="checkbox"/> 手順に欠落がある
結果	<input type="checkbox"/> 未加工のデータの数値が単位とともにわかりやすく記載されている <input type="checkbox"/> 未加工のデータが適切にグラフにプロットされている <input type="checkbox"/> 未加工のデータとそれから得られる個々の値の対応がわかりやすく表にまとめられ、表にはタイトルがある <input type="checkbox"/> グラフには変化の様子を表す曲線が(フリーハンドで、あるいは近似曲線として)記入されている <input type="checkbox"/> 特記事項	<input type="checkbox"/> データの数値がもれなく記載されている <input type="checkbox"/> データのプロットが漏れなく行われている	<input type="checkbox"/> データに記載ミスがある、あるいはミスを追跡できない
議論・考察	<input type="checkbox"/> 課題に対する回答をうまく生かした形で考察を展開している <input type="checkbox"/> 参考値や文献値との比較を行い、それらの出典を明記している <input type="checkbox"/> 参考値や文献値との隔たりの理由を論じている <input type="checkbox"/> 誤差の原因を追究し、これを減らすための提言を行っている <input type="checkbox"/> 特記事項	<input type="checkbox"/> 課題の回答を記載している <input type="checkbox"/> 参考値や文献値が示されている <input type="checkbox"/> おおかたが客観的な文章で構成できている <input type="checkbox"/> 誤差の原因を列挙している	<input type="checkbox"/> 主観的な書き方や感想で構成されている
結論	<input type="checkbox"/> 目的・課題との対応があり、達成度がわかりやすく書かれている <input type="checkbox"/> 特記事項	<input type="checkbox"/> 目的・課題の一部と対応する結論が示されている	<input type="checkbox"/> 結論があるが達成度について分かりやすさにかけている
その他	<input type="checkbox"/> 特記事項		

1. 実験の目的

- 代表的な測定器具であるノギスとマイクロメーターの使用法を習得する。
- データのばらつきに対する統計的な処理方法(大きさの評価と計算への影響)を習得する。
- データに系統的ずれがある場合の処理方法を習得し、これを考慮して結論を述べる。
- 実験レポートの形式をこの具体例を通して理解する。

2. 理論: データのばらつきに対する統計的な取り扱いについて

(1) 物理量 x を n 回繰り返し測定したときのばらつきによる偶然誤差 Δx の定義

- 平均値 \bar{x} の定義

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- 測定における平均値の意味

測定している物理量 x について、真の値 X がある程度近いと考えられる値。どの程度近いかについては誤差を定義して示す必要がある。

- 標準偏差 σ の定義

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

- 標準偏差の意味

十分な数(数百回)の測定を繰り返したときの測定結果が n 回の測定と同様のばらつきをすると仮定して、真の値 X が

$$\bar{x} - 0.675\sigma < X < \bar{x} + 0.675\sigma \quad \text{の範囲にある確率が} \quad \boxed{\quad} \%$$

$$\bar{x} - \sigma < X < \bar{x} + \sigma \quad \text{の範囲にある確率が} \quad \boxed{\quad} \%$$

$$\bar{x} - 2.58\sigma < X < \bar{x} + 2.58\sigma \quad \text{の範囲にある確率が} \quad \boxed{\quad} \%$$

になる。

- $\boxed{\quad}$ % 誤差 Δx の意味

n 回の測定の平均値 \bar{x} に対して、真の値 X が $\bar{x} - \Delta x < X < \bar{x} + \Delta x$ の範囲にある確率が $\boxed{\quad}$ % になる。ただし、 n 回の測定では十分な数とはいえないため、標準偏差は上記の意味を持たない。

- 50% 誤差 Δx の定義

$$\Delta x = t_{0.5}(n) \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

n はデータの数。 $t_{0.5}(n)$ は信頼係数 50% に対する「t - 分布」の係数。

- t-分布係数の値(例)

$$50\% \text{誤差} \quad t_{0.50}(2) = 1.0 \quad t_{0.50}(3) = 0.82 \quad t_{0.50}(6) = 0.73 \quad t_{0.50}(10) = 0.70$$

$$99\% \text{誤差} \quad t_{0.99}(2) = 6.4 \quad t_{0.99}(3) = 9.9 \quad t_{0.99}(6) = 4.0 \quad t_{0.99}(10) = 3.3$$

(2) 異常な値が得られた場合の棄却

- 同じ値が得られるはずの繰り返し測定の中で、一つだけ異常に大きいあるいは小さい値が出ている場合に、その理由が見当たらなくても、統計的にありえないという理由に基づいてデータを捨てることができる。この場合の棄却の判断基準は、ずれの大きさが標準偏差の3倍以上であることである。

(3) 標準偏差が小さい場合の誤差の決め方

- 測定にばらつきがなければ標準偏差は小さい値が得られる。この場合、測定機器の持つ読み取り精度を考慮する必要がある。すなわち、測定機器の最小読み取り値の半分が m で、これが標準誤差から計算した誤差 Δx より大きければ、改めて $\Delta x = m$ とする。

(4) 何らかの理由により測定結果が系統的にずれてしまう場合の、計算結果のずれ(かたより)

- 測定値が d と h で、これらから式 $f = F(d, h)$ により計算し、値 f を求めるとする。検討の結果、測定値 h が Δh だけずれていた。このずれがわずかなら、それによる値 f のずれは Δh に比例する。このずれを Δf_1 とすると、これは無関係の変数 d を固定して $F(d, h)$ を h で微分した量(これを $\left(\frac{\partial F}{\partial h}\right)_d$ とかく)を比例係数とする $\Delta f_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial h}\right)_d \Delta h$ により求めることができる。同様に、測定値 d が Δd だけわずかにずれているなら、それによる値 f のずれ Δf_2 は Δd に比例し、無関係の変数 h を固定して d で $F(d, h)$ を微分した量(これを $\left(\frac{\partial F}{\partial d}\right)_h$ とかく)を比例係数として、 $\Delta f_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial d}\right)_h \Delta d$ となる。両方が影響するときのずれ Δf は次式(単純和で、打ち消しあう場合もある)で計算できる。

$$\Delta f = \Delta f_1 + \Delta f_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial h}\right)_d \Delta h + \left(\frac{\partial F}{\partial d}\right)_h \Delta d$$

(5) 測定データのばらつきによる計算結果のばらつき

- 測定値 d, h がそれぞれ、平均値 \bar{d}, \bar{h} のまわりで誤差 $\Delta d, \Delta h$ のばらつきを持つ場合、計算した平均値 \bar{f} (これは式 $f = F(d, h)$ に平均値 \bar{d}, \bar{h} を代入し、 $\bar{f} = F(\bar{d}, \bar{h})$ として求める) に対する誤差 Δf は次式から計算する。

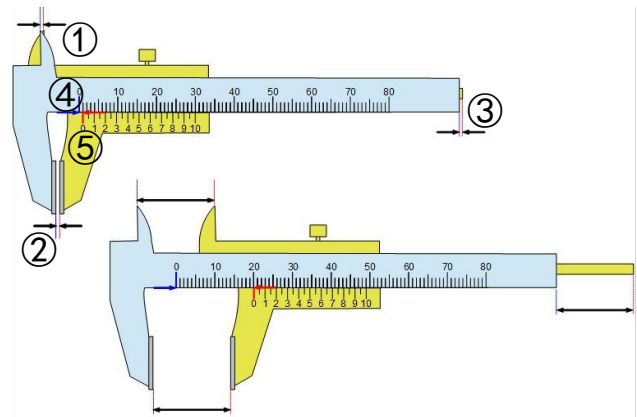
$$\Delta f = \boxed{\hspace{15em}},$$

ただし、この式の右辺の値を評価するときには $d = \bar{d}, h = \bar{h}$ を用いる。

3. 装置

(1) ノギス 測定に関連する部分の名称・用途は

- ①: 内側用ジョウ
- ②: 外側用ジョウ
- ③: 深さ測定用バー
- ④: 主尺目盛
- ⑤: 副尺目盛



である。ノギスの使用に当たっては、主尺の読み位置を間違えることが多いので注意する。

主尺は『副尺のゼロの目盛り線』の位置を読む。ゼロ位置がずれることはほとんどない。今回のノギスの最小読み取り値の半分は $m = \underline{\hspace{2cm}} \text{ mm}$ である。

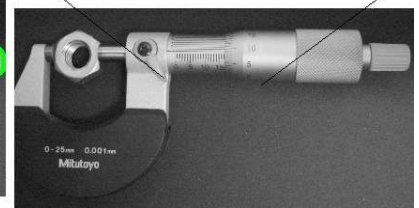
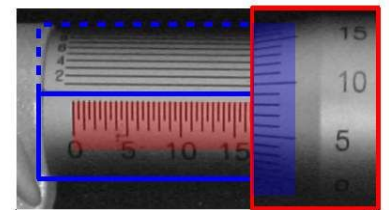
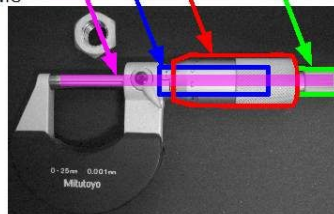
(2) マイクロメーター 測定に関わる部分の名称・用途は

(1): スリーブ (主尺目盛が刻まれた軸。主尺はシンプルの下に隠れるのでそのエッジを読む。シンプルの目盛りに対する副尺も刻まれている。)

Micrometer

Names of parts:

- (1) sleeve
- (2) thimble
- (3) ratchet
- (4) spindle



(2): シンプル (回転部分で、一回転 50 の目盛が刻まれている)

(3): $\underline{\hspace{2cm}}$ (物体をはさむ力が適切になるよう空回りするつまみ)

(4): スピンドル (変形の小さな合金製の棒。物体をはさむ。シンプルとともに移動する。)

である。物体をはさむとき、シンプルに回転力をかけるとはさむ力が想定以上に大きくなり、スピンドルが $1 \mu\text{m}$ 以上縮んでしまうため、必ずラチェットを回してはさむこと。ゼロ位置がずれることは極めて一般的であり、物体をはさんだ時の読み取りの前後でゼロを読み、補正する必要が常にある。今回のマイクロメーターの最小読み取り値の半分は $m = \underline{\hspace{2cm}} \text{ mm}$ である。

4. 実験手順・方法

- (1) 与えられた金属円柱の直径と高さをものさし、ノギス、マイクロメーターでそれぞれ 6 回測り、平均と標準偏差を求める。特にマイクロメーターのゼロ位置は毎回測定すること。
- (2) 直径と高さについて、それぞれ誤差を求める。
- (3) これらから、体積計算の平均値 \bar{V} と誤差 ΔV を求める。

5. データ整理と計算(1)

(1) 使用した器具: _____

(2) 直径 d (単位:mm)

回	1	2	3	4	5	6	予備	
読み1(ゼロ点)								平均値
読み2								
値								
平均からの差								標準偏差
その2乗								

_____ %誤差の計算: t-分布係数 $t_p(n) =$ _____ (ただし, $p =$ _____, $n =$ _____)

$$\Delta d = t_p(n) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

最小読み取り値の半分 $m =$ _____ との比較の結果: 直径の誤差 $\Delta d =$ _____ mm $^\circ$

(3) 厚さ h (単位:mm)

回	1	2	3	4	5	6	予備	
読み1(ゼロ点)								平均値
読み2								
値								
平均からの差								標準偏差
その2乗								

_____ %誤差の計算: t-分布係数 $t_p(n) =$ _____ (ただし, $p =$ _____, $n =$ _____)

$$\Delta d = t_p(n) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

最小読み取り値の半分 $m =$ _____ との比較の結果: 高さ h の誤差 $\Delta h =$ _____ mm $^\circ$

(4) 体積: $V = \frac{\pi}{4} d^2 h$

$$\text{係数 } \left(\frac{\partial V}{\partial d}\right)_h = 2 \frac{\pi}{4} d h = V \times \frac{2}{d} = V \times (\text{値 } \underline{\hspace{1cm}} \text{ [単位 } \underline{\hspace{1cm}} \text{]})$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)_d = \frac{\pi}{4} d^2 = V \times \frac{1}{h} = V \times (\text{値 } \underline{\hspace{1cm}} \text{ [単位 } \underline{\hspace{1cm}} \text{]})$$

誤差の計算

実験結果のまとめ: 器具: _____ を使って円柱の体積が次のように得られた。

$$V = (\underline{\hspace{1.5cm}} \pm \underline{\hspace{1.5cm}}) \times 10 \underline{\hspace{0.5cm}} \text{ mm}^3$$

6. データ整理と計算(2)

(1) 使用した器具: _____

(2) 直径 d (単位:mm)

回	1	2	3	4	5	6	予備	
読み1(ゼロ点)								平均値
読み2								
値								
平均からの差								標準偏差
その2乗								

_____ %誤差の計算: t-分布係数 $t_p(n) =$ _____ (ただし, $p =$ _____, $n =$ _____)

$$\Delta d = t_p(n) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

最小読み取り値の半分 $m =$ _____ との比較の結果: 直径の誤差 $\Delta d =$ _____ mm $^\circ$

(3) 厚さ h (単位:mm)

回	1	2	3	4	5	6	予備	
読み1(ゼロ点)								平均値
読み2								
値								
平均からの差								標準偏差
その2乗								

_____ %誤差の計算: t-分布係数 $t_p(n) =$ _____ (ただし, $p =$ _____, $n =$ _____)

$$\Delta d = t_p(n) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

最小読み取り値の半分 $m =$ _____ との比較の結果: 高さ h の誤差 $\Delta h =$ _____ mm $^\circ$

(4) 体積: $V = \frac{\pi}{4} d^2 h$

$$\text{係数 } \left(\frac{\partial V}{\partial d}\right)_h = 2 \frac{\pi}{4} dh = V \times \frac{2}{d} = V \times (\text{値 } \underline{\hspace{1cm}} \text{ [単位 } \underline{\hspace{1cm}} \text{]})$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)_d = \frac{\pi}{4} d^2 = V \times \frac{1}{h} = V \times (\text{値 } \underline{\hspace{1cm}} \text{ [単位 } \underline{\hspace{1cm}} \text{]})$$

誤差の計算

実験結果のまとめ: 器具: _____ を使って円柱の体積が次のように得られた。

$$V = (\underline{\hspace{2cm}} \pm \underline{\hspace{2cm}}) \times 10 \underline{\hspace{1cm}} \text{ mm}^3$$

7. データ整理と計算(3)

(1) 使用した器具: _____

(2) 直径 d (単位:mm)

回	1	2	3	4	5	6	予備	
読み1(ゼロ点)								平均値
読み2								
値								
平均からの差								標準偏差
その2乗								

_____ %誤差の計算: t-分布係数 $t_p(n) =$ _____ (ただし, $p =$ _____, $n =$ _____)

$$\Delta d = t_p(n) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

最小読み取り値の半分 $m =$ _____ との比較の結果: 直径の誤差 $\Delta d =$ _____ mm°

(3) 厚さ h (単位:mm)

回	1	2	3	4	5	6	予備	
読み1(ゼロ点)								平均値
読み2								
値								
平均からの差								標準偏差
その2乗								

_____ %誤差の計算: t-分布係数 $t_p(n) =$ _____ (ただし, $p =$ _____, $n =$ _____)

$$\Delta d = t_p(n) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

最小読み取り値の半分 $m =$ _____ との比較の結果: 高さ h の誤差 $\Delta h =$ _____ mm°

(4) 体積: $V = \frac{\pi}{4} d^2 h$

$$\text{係数 } \left(\frac{\partial V}{\partial d}\right)_h = 2 \frac{\pi}{4} d h = V \times \frac{2}{d} = V \times (\text{値 } \underline{\hspace{1cm}} \text{ [単位 } \underline{\hspace{1cm}} \text{]})$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)_d = \frac{\pi}{4} d^2 = V \times \frac{1}{h} = V \times (\text{値 } \underline{\hspace{1cm}} \text{ [単位 } \underline{\hspace{1cm}} \text{]})$$

誤差の計算

実験結果のまとめ: 器具: _____ を使って円柱の体積が次のように得られた。

$$V = (\underline{\hspace{2cm}} \pm \underline{\hspace{2cm}}) \times 10 \underline{\hspace{1cm}} \text{ mm}^3$$

8. 考察

- 三つの測定結果を再録する。

ものさし: $V =$

ノギス: $V =$

マイクロメーター: $V =$

- これらをひとつの数直線上に線分で表現すると以下ようになる。

- これらの範囲の関係:

- 測定値は、縁に凹凸があれば、均した値よりもわずかに大きくなる傾向があるだろう。直径の測定値が均した直径よりも 0.02 mm 大きいとし、高さは測定値のままとすれば、体積の推定値は _____ mm^3 になる。また、高さの測定値が均した高さよりも 0.05 mm 大きいとし、直径は測定値のままとすれば、積の推定値は _____ mm^3 になる。

- 参考までに、

使用した金属

密度

質量

質量から予想される体積

- 質量から予想される体積と、実際の結果の関係

9. 結論

- 金属円柱について、測定回数と測定結果、および体積の計算結果をまとめる。

ものさし

直径 _____ \pm _____ mm (____回), 厚さ _____ \pm _____ mm (____回)

体積は _____ \pm _____ mm^3

ノギス

直径 _____ \pm _____ mm (____回), 厚さ _____ \pm _____ mm (____回)

体積は _____ \pm _____ mm^3

マイクロメーター

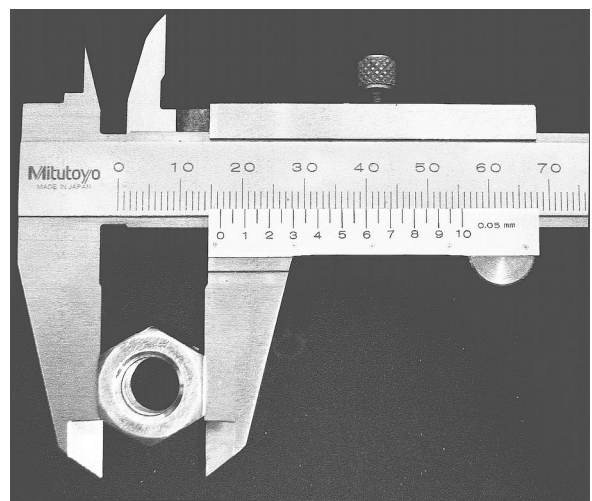
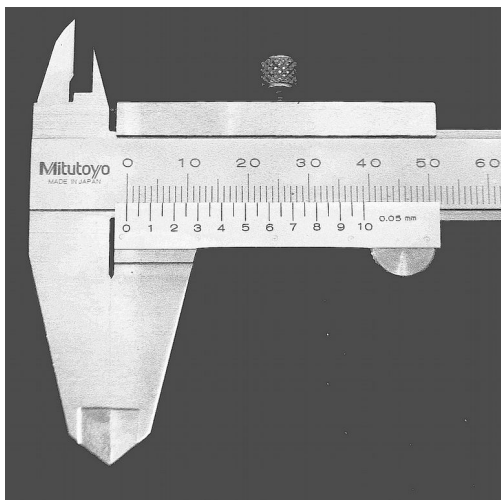
直径 _____ ± _____ mm (____回), 厚さ _____ ± _____ mm (____回)

体積は _____ ± _____ mm³

10. 付録

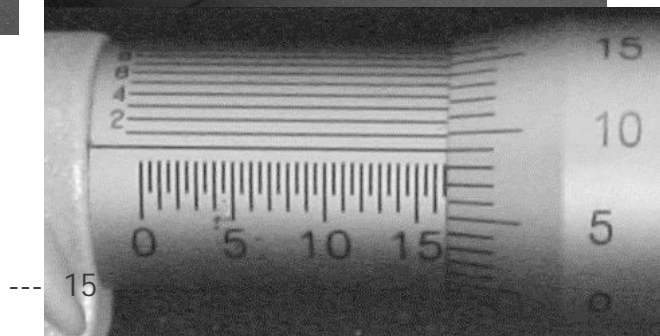
(1) ノギスの読み取りかた(例)

- 1 このノギスのゼロ点の読みは _____
- 2 物体をはさんだときの読みは _____
- 3 物体の長さは _____



(2) マイクロメーターの読み取り方(例)

- 1 このマイクロメーターのゼロ点の読みは _____
- 2 物体をはさんだときの読みは _____
- 3 物体の長さ _____



等電位線 (測定基礎 2: 機器測定)

[目的]

アナログ式とデジタル式の機器測定の基礎を理解する。

To understand the basics of instrumental measurement with analog and digital apparatus

電流計の分流器, 電圧計の倍率器, およびデジタル・マルチメーターの確度を理解する。

To understand the current divider, voltage multiplier, and accuracy of digital multimeter

豆電球による簡易調光器を, シャープペンシルの芯を使って作る。

To construct a simple dimmer with a small bulb and an automatic pencil lead

二次元電流分布の上で等電位点を探索し, 電流の方向を議論する。

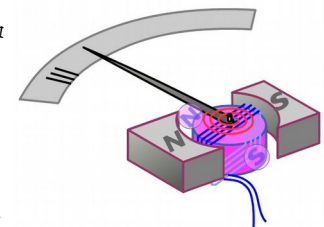
To search the equipotential points in a 2D current distribution and discuss current directions

[理論(1) 機器測定]

各種の物理量を測定する装置はすべて, 検知するシステムと表示するシステムから構成されている。表示部分を外部に持つ装置では表示のための信号を外部に出力し, 汎用の表示器で表示する。表示の方法にはアナログとデジタルがある。内部に表示器があるも, 検出部分から表示器へ信号が受け渡される。

アナログ表示器 アナログ表示のための信号は, 電圧や電流が連続的な値をとりながら持続的に受け渡される。最大値が許容範囲にあるものであれば汎用の電圧計や電流計が表示器として利用できる。アナログ表示器は, 指針の振れや輝点の動きによって測定値を連続的に表示し続けるもので, 指針や電子などの慣性質量を持つ物体の力学的な運動を伴うためにその表示には慣性があり, 表示すべき量に微小な振動ノイズが重なっても平滑化され, 値が読み取りやすい反面, すばやい変化には追従していない。また, 指針を持つ表示器では JIS によって許容誤差が定められていて, 一般の計器は指針が振り切れるときの $\pm 2.5\%$ (JIS 2.5 級) が許容されている。目盛りが最大 5V であれば $\pm 0.125V$ が許容誤差である。精密測定用の計器では許容誤差がその 1/5 になるもの (JIS 0.5 級) などがある。

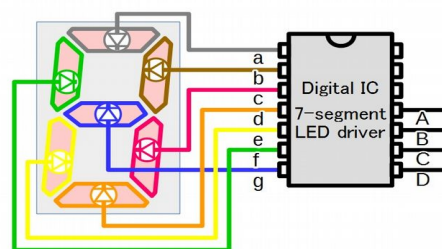
指針を持つアナログ表示器の, 指針の駆動方法の代表例が永久磁石可動コイル型である。永久磁石の N 極と S 極の間に設置された回転可能なコイルに電流が流れると電磁石となって磁気的なトルク(回転力)がかかる。したがって, このような表示器の根本的原理は電流計とみなすことができる。コイルの回転変位はこの磁力がぜんまいバネの復元力によるつりあいとして決まり, コイルに固定された指針の先で数値が表示される。コイルや指針には質量があるため, 勢い良く回りだすと限界に達しても止まらず, 破損してしまう。したがって, 最大値より大きな量を入力したり, プラス・マイナスを間違えて接続したりしないよう注意が必要である。また, 移動時には指針を保持する機構(入力を短絡するのも良い)が備わっていればそれを利用し, 備わっていなければ丁寧に取り扱い, 衝撃を与えないこと。



デジタル表示器 アナログ時計では時針・分針・秒針の回転角度で時刻を表示する。これに対し、デジタル時計では時・分・秒をそれぞれ2桁の数字(0から9の文字ふたつ)で表示し、秒の桁の表示は1秒毎に1回更新する。タイムウォッチでは100分の1秒の桁まで計測するが、液晶表示画面によるデジタル表示器の場合は液晶画面の更新は1秒間に数十回なので、最小桁(100分の1秒の桁)の表示が意味をなすのはストップボタンを押した後だけである。

デジタル表示器では規格で定められたデータ転送速度があり、変動する現象に対してデータ更新の時間間隔が十分短ければ変化に十分追従した表示が得られるが、表示すべき量に微小な振動ノイズが重なると読み取りごとに異なる値が得られてしまう。したがって、そのようなノイズを低減させる工夫が施されるとともに、表示のための平均操作が装置内部で行われる。変動する現象を想定していない装置(電子天秤など)では平均を取るための時間を長くとり(1/2秒など)ため、素早い変化には追従しない。

最も簡素なデジタル表示器は、8の文字を7つの線分(segment)に分解し、その組み合わせで0から9までのすべての文字を表示するもので、個々の線分がひとつのLEDになっている「7セグメントLED」である。デジタル表示の更新と更新の間に、表示器すべてのドットに対する値が受け渡される。



たとえば7セグメントLEDで4桁の表示装置が1秒間に3回更新される場合は、1秒あたり $7 \times 4 \times 3 \sim 90$ ビット(～12バイト)以上のデータ転送が行われる。この信号のビット切り替え(0と1, ON/OFF)を受け渡すには、クロック信号として1秒間に100回=100 Hz程度のものであればよい。また、 $640 \times 400 = 256000$ ドットの液晶画面を直列送信するには、各ドットが8ビット(1バイト)のデータからなり(1回の表示更新あたり2048000ビット～256キロバイト)、更新が1秒間に30回なされる場合は、1秒あたり約60メガビット(約8メガバイト)のデータ転送が行われる。この信号のビット切り替えを受け渡すためのクロック信号には60 MHz以上のものが使われる。

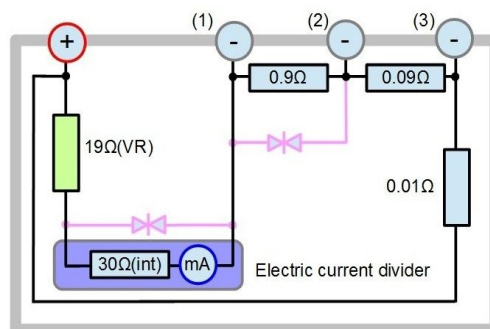
検出器(信号変換器) 測定装置における物理量検出の部分は、測定したい物理量(位置, 圧力, 音量, 温度など)を表示器へ受け渡す信号へと変換する装置である。

アナログ信号を生成する検出器では、物理量を検出するセンサーの特性がそのまま利用されるが、電圧や電流が微小なものであればそれを増幅させるための電気回路を含む。アナログ表示器は本質的には電流計であり、適切な電流量を得るためにはトランジスターを用いた電流増幅回路が利用される。近年の電子デバイスの小型化によって、多数のトランジスターを含む回路をひとつのデバイスにしたオペアンプなどのICも同じ目的で利用されている。

デジタル信号を生成する検出器では、測定する物理量をまず電圧に変換し、それを装置内部の基準電圧と比較する。アナログの電圧からデジタル信号を得る素子を、一般にA-D変換器という。内部の基準電圧の最大値を1024(=2¹⁰)段階に分割して測定量と比較する場合は、得られる値は1024段階の分解能をもつ。これは10ビットA-D変換器と呼ばれ、最大値が10Vであれば1段階が0.01Vであるため表示は10.00Vまでであり、3+1/2桁(1/2桁は10の位が1かゼロかという意味)の表示ができる。

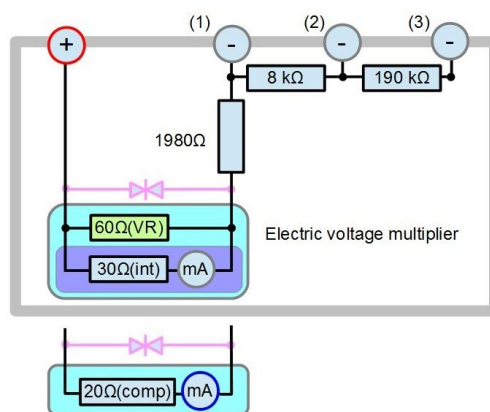
[理論(2) 電流計, 電圧計, デジタル・マルチメーター]

アナログ電流計と分流器 アナログ電流計にはひとつのプラス端子と三つのマイナス端子があり, どのマイナス端子を使うかによって指針の表示レンジが切り替わる。あるアナログ電流計の内部の回路(分流器)を示す。ただし, $30\Omega(\text{int})$ の部分は永久磁石可動コイル型表示器である。コイルの内部抵抗は計器ごとに多少ばらつきがあるが, 隣接した可変抵抗(variable resistor)を調整し, これらふたつの抵抗を並列に接続した合成抵抗が 49Ω になる例となっている。この例でどのマイナス端子を使っても, 表示器を通らない分流路(バイパス)がある。



この場合の mA は指針につながったコイル, $30\Omega(\text{int})$ はコイルの内部抵抗(internal resistance)を表す。実際の内部抵抗をコイルの外に明示しているため, mA は内部抵抗ゼロである。また, diode は過電流保護のための素子で, それに並列におかれた保護対象の素子に想定以上の大きな電圧がかかったとき, diode を通して電流が流れて保護対象の素子には電流が流れない。通常は diode は開放され配線が途切れているものと理解してよい。

アナログ電圧計と倍率器 アナログ電圧計にもひとつのプラス端子と三つのマイナス端子があり, どのマイナス端子を使うかによって指針の表示レンジが切り替わる。あるアナログ電圧計の内部の回路を示す。この表示部分も, 永久磁石可動コイル型表示器 ($30\Omega(\text{int})$ で表す) である。コイルの内部抵抗は, 隣接した可変抵抗(variable resistor)との合成抵抗が 20Ω になる例を示している。したがって, この部分の等価回路は右のようになる。



マルチメーター マルチメーター(テスター)には内部回路の切り替えスイッチがあり, 直流・交流の電流や電圧, さらに抵抗も1台で測定できる。アナログ表示かデジタル表示かによらず多機能である。ただし,

電流測定時には対象となる電流をすべて通す(回路上の素子と直列接続)

電圧測定時には電流を分岐させてごく一部のみ通す(回路上の素子と並列接続)

という使い方は電流計・電圧計と変わらない。抵抗測定では内部の電源から電流を供給しながら電圧測定を行う。デジタル・マルチメーターはアナログ・マルチメーターに比べ, 追加機能(周波数, 温度, 容量測定など)を持つものもあるほか, 入力抵抗が大きい特徴がある。電圧計に流れ込む電流は小さいほうがよく, そのために電圧測定はデジタル測定器のほうが望ましい。

なお, デジタル測定器では以下のふたつの値の和によって定義される「確度」を, ふたつの値を並べて $\pm(\%rdg + dgt)$ のように表記するのが一般的である。

rdg (=reading) 誤差は読み取り値の何%か

dgt (=digit) 誤差は最終桁の数字でいくつ分か

[理 論(3) 二次元電流分布]

空間上のある位置での電界(電場)は、そこに電荷を導入したときにかかる力を意味する。空気などの絶縁性の空間中では、帯電した絶縁体をいくつか配置すればその周りの電界分布は静電気に関するクーロンの法則によりただちに定まるが、塩水などの導電性の空間中や帯電した伝導体を配置するときは電流が流れることができるので、電荷の分布は変化しうる。電荷の変化が起こらない状態としては、どこかに電荷の流入部と流出部があって、空間を流れる電流の向きや強さの分布が時間変化しない状況がありうる。このような電流の分布を **定常的な電流分布** という。電荷の流入部は正電極、流出部は負電極であり、電池などの直流電源を接続すればこれらの電圧の差(電位差)は一定である。

ある位置での電流の向きは、その位置に電荷があるときに、そこで受ける電気力の向きを表す。しかし、電荷には電気抵抗に相当する抵抗力もかかっているため、正電極から動き出し、負電極に達するまでに、**電気力によって電荷が受ける仕事は、すべて抵抗力によって失われ**、電荷の移動速度は一定である。また、正電極から負電極に達する道のりには近道も遠回りの道もありうるだろうが、**どの道をたどっても、電気力がする仕事(すなわち、抵抗力によって失われるエネルギー)には差がない**。このことは、道のり上の道しるべとして電気力がする仕事 が使えることを意味する。「+1 C の正電荷が正電極からその位置に至るまでに、電気力がする仕事」に負号(マイナス)をつけたものを、正電極を基準とした「高さ」と考え、**電位** と呼ぶ。

電流の流れる道のりに沿って正電荷が移動するとき電気力は正の仕事をし、電位は減少する。この電位減少分を移動距離で割った値は、「単位電荷に電気力がする力の大きさ」であり、**電界の強さ**になる。電流の方向は電気力の方向であり、これと電位が(最も)変化する方向は一致する。逆に、電位が変化しない方向には電気力は働かない。電位が等しい点を結んだ線を**等電位線**という。等電位線は電気力に直交する。

太さの一定な細長い導体を起電力(電位差)が一定の電池の正・負の電極につないだ時には、導体に沿って電流が流れ、その強さは一樣になる。しかし、導体に太い部分や細い部分がある場合、電流の密度(単位断面積あたり)は小さくなったり大きくなったりする。電流を上流から下流へと一筆でつながる流線で描くとき、**電流密度**は隣り合う電流線の間隔の狭さ(単位断面積当たりの電流線の本数)を表す。一樣な物体中では電流密度は**電界の強さに比例**する。その比例係数は伝導率(あるいはその逆数で定義される抵抗率)である。導体が線ではなく箔や塊であれば、二次元や三次元の空間に電流が散らばるため、電流の向きが位置ごとに異なる。**導体表面では電流は表面に沿って流れる**。また、**電極表面では電流は表面に垂直に流れる**。また、電流の流れはつながっているため、導体表面や電極表面のまわりの電流分布もこれに影響される。さらに、導体の一部で伝導率が大きい場合、その内部での電荷が移動するときの抵抗力によるエネルギー損失は、その外部で移動する場合より少ない。従って、伝導率が大きい部分の内側は電位の変化が小さくなる。

電流線と等電位線の特徴を以下にまとめる。

電極表面は等電位線のひとつである。

導体表面は電流線のひとつである。

等電位線と電流線は直交する。

等電位線どうし、電流線どうしは交差したり、途中で枝分かれしたり途切れたりすることはない。

等電位線が密になる付近では電流線が密に、疎になる付近では疎になる。

[装置]

AC-DCアダプタ(5V 1A), 豆電球, シャープペンシルの芯, セロハンテープ, デジタル・マルチメーター, 直流電源(充電式電池の直列接続2本, 約2.6V), 導電性シート(静電気防止用ポリフィルム, アキレスE-100, 厚み50 μ m, 表面抵抗値 $1 \times 10^6 \Omega$ 以下), リード線, 電極用ネオジウム磁石, ドーナツ型金属板(真鍮製シムリング等), ナット, 表面に絶縁シートを貼った鉄板, 白色サインペンあるいは修正ペン, トレース紙

注:導電性シートが入手できなければアルミ箔で代用することも可能であるが, 導電シートに比べて伝導率が大きいので, 大きな電流が出力できる直流電源(AC-DCアダプタ等)を使うこと, また, 電流を(1 A以下などに)制限するためにアルミ箔と電源との間に数 Ω の抵抗を直列に挿入することが必要となる。

[実験方法]

実験1 導電シートを用いて自在な形の電流分布をつくり, 等電位となる点を探査する。

1-1 電極をどこに配置するかを想定したうえで, 与えられた導電シートを形状に切断するための設計図を作り, 実際に切断する。中央部に穴をあけてもよい。シートを引き伸ばさないよう, また折り目ができないように注意すること。また, 外側あるいは内側に向いてとがった部分を意図的に作るのもよい。ドーナツ型金属板等を貼りつけてその内部での遮蔽効果を導入するものよい。設計図にはこれらも加えること。

1-2 導電シートの切断やドーナツ型金属板の位置, そして電極の位置をノート等に正確に描き写し, それに電流分布を予想して加える。導電シートや金属板の縁と電流線との関係を正確に反映させること。

1-3 鉄板上に絶縁シートを載せ, その上に, 皺(しわ)ができないように導電シートを置く。二つの電極用ネオジウム磁石を導電シート上に貼りつける。磁力は強いので貼りついてから位置をずらすときにはシートを傷つけやすいので注意する。ナットを電極用ネオジウム磁石の上に貼りつけ, ミノムシクリップでそれを挟むことにより電極とリード線を接続する。負電極にはデジタル電圧計のマイナス端子を接続し, 固定する。

1-4 デジタル電圧計のプラス端子を正電極につけて, 電源の初期起電力を記録する。

1-5 予想した電流線のいくつかに沿って, デジタル電圧計のプラス端子を導電シートに接触させて探査しながら, い電位表示が0.4~2.2 Vとなる位置を0.1 V刻みで見つけ, シート上に小さな点でマークをする。導電シートへの接触でシートを大きく歪めないように注意すること。電位が0.1, 0.2, 0.3 V(負電極付近)や2.3, 2.4, 2.5 V(正電極付近)は狭くなるので, 0.2 V刻みにする。

1-6 ひとつひとつの電位の値について, 同じ電位になる点をシート上で多数見つけてマークしておく。等電位点の列はシートを横断したり一部分を一周したりする。1 cm 間隔程度でマークしてこの点列の形状を大まかに把握し, その後, 等電位の点列がなす曲線が急激に曲がる場所や, シートの端面・切断面で曲線が途切れるところを重点的に(最も端の点と, そこから2 mm 間隔で離れた点を2つ程度など)探査して, 点列の形状の隅々での詳細を調べる。また, 探査し終わった時点で電源の起電力を調べ, 変化していないことを確認し, 記録する。点の数が多くなると他の電位の点と区別がつかなくなるので注意する。

1-7 等電位点の位置を全てトレース紙に書き写す。導電シートの外形や切断形状, 正・負の電極の位置や向き, また, 電気抵抗率の小さなドーナツ型金属板の形状を漏れなくトレース紙に正確に写すこと。つま

り、等電位となった点と、電流分布を決定する上で与えた境界条件(導電シートの輪郭、金属製リングの位置や大きさ、および電極の位置や大きさ)のすべてが実験結果として必要である。

実験 2 実験結果としての等電位の点列を滑らかに結び、電流線を書き込む。

2-1 トレース紙上で等電位点列をなめらかに結び、等電位線を描く。境界条件となる線とどのような幾何学的関係にあるのかを意識しながら描くこと。測定電位もわかるように記入する。

2-2 等電位線に直交する線として、電流線を描く。電流線も、境界条件となる線とどのような幾何学的関係にあるのかを意識しながら描くこと。なお、電流線の密度は等電位線の密度と関係があるので、できるだけそれに注意する。

実験 3 豆電球とシャープペンシルの芯の抵抗値を測定し、これらと 5V の AC-DC アダプタを組み合わせ、簡易な豆電球調光器を組む。

3-1 シャープペンシルの芯の抵抗をデジタル・マルチメーターで測定する。デジタル・マルチメーターのプローブ(赤と黒のケーブル)の先端が芯のどこに接触するか、その位置を変えながら、抵抗として測定している芯の長さとの表を作成し、グラフにプロットする。

3-2 豆電球に表記されている(定格)電圧・電流の値を読み取る。

3-3 シャープペンシルの芯の一部を豆電球と直列接続して 5 V 印加したとき、豆電球にかかる電圧や流れる電流が定格の値かそれ以下になるには、シャープペンシルの芯をどのくらいの長さとするればよいか、検討する。

3-4 シャープペンシルの芯の中央において、得られた長さをセロハンテープで覆い、それより短くは使えないようにして、実際に豆電球と直列接続し、5 V 印加して豆電球の点灯の様子を確認する。芯を長く使えば暗く、短くすると明るくなることで、スライド式の簡易型調光器とする。

〔設問〕

1. 電極の表面はひとつの等電位線になる。これはなぜか、説明しなさい。
2. 導電シートの外形はひとつあるいはいくつかの電流線の一部になる。これはなぜか、説明しなさい。
3. 等電位線と電流線(あるいは電界の向き、または電気力線)は直交する。これはなぜか、説明しなさい。
4. 等電位線どうし、あるいは電流線どうしは交差したり、途中で途切れたりすることはない。これはなぜか、説明しなさい。
5. 等電位線が密になる付近では電流線が密になり、等電位線が疎になる付近では電流線が疎になる。これはなぜか、説明しなさい。
6. 実験結果としての等電位線や電流線の疎密に見られる幾何的な特徴を列挙し、それを、実験条件とし

での境界条件と結び付けて議論しなさい。境界条件に基づくシミュレーション結果が示される場合はそれとの比較も議論しなさい。

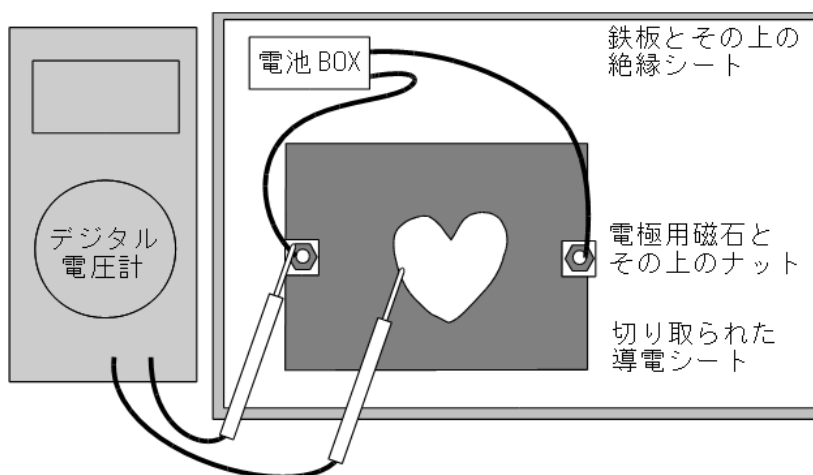


Fig.1 実験器具の設置

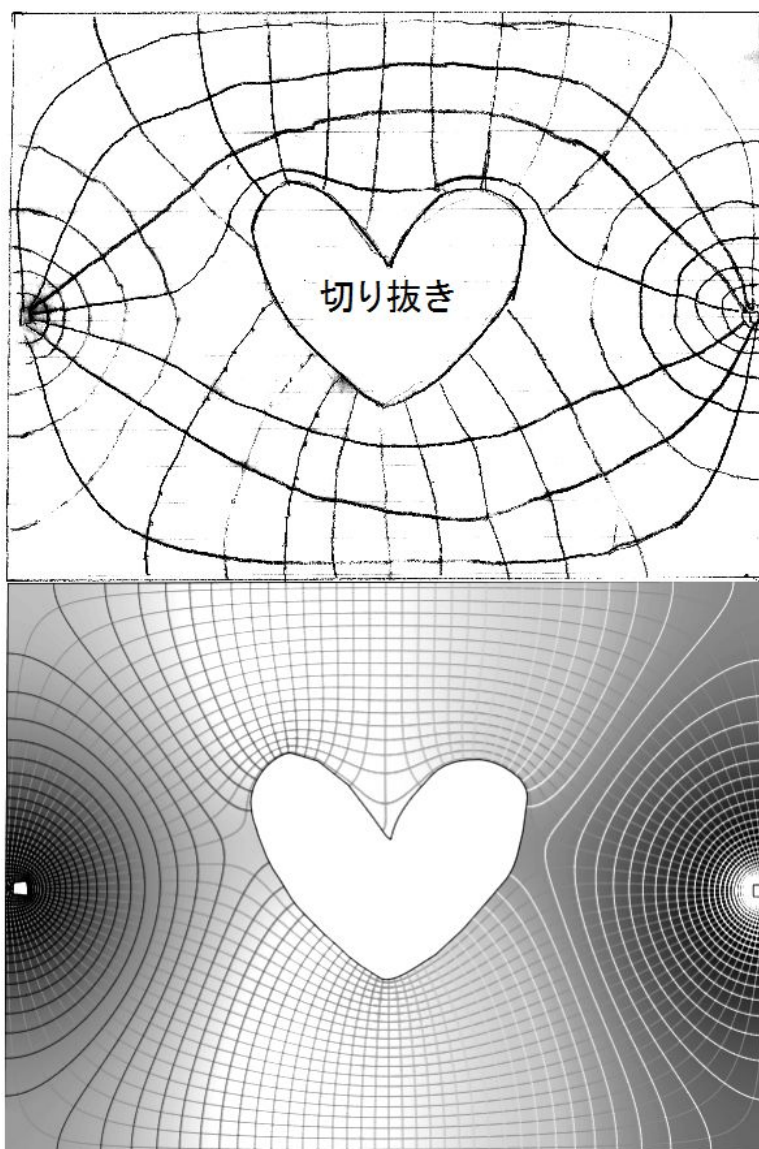


Fig.2 実験結果の例と、その境界条件に基づくシミュレーション例

固体の比熱 (測定基礎 3: 温度測定・時定数)

[目的]

測温抵抗体を用いた温度測定を行い、センサーの応答時間や時定数の意味を理解する。

To measure temperatures by a resistance temperature detector, and to understand the meaning of required time for sensing or time constants for sensors.

熱量計を用いて混合法で金属の比熱を測定し、また、そのとき熱量計内で移動した熱量を評価する。

To determine specific heat of metals of by mixing method using a calorimeter, and to evaluate the amount of heat transferred in the calorimeter.

[理論(1):比熱]

物質の**比熱**とは、その物質 1 g の温度を 1 °C 上昇させるのに要する熱量で、物質の温まりにくさを数値化した物理量である。熱量の単位であるカロリー (cal) は、水 1 g の温度を 15 °C において 1 °C 上昇させるのに要する熱量として定義されている。エネルギーの単位であるジュール (J) とは、定義により 1 cal = 4.184 J の関係が定められている。比熱の単位を cal/g°C で与える場合、物質の比熱の数値は**その物質が同じ質量の水に比べて何倍温まりにくい**かを表している。

θ_{w1} [°C] の水 m_w [g] が入った熱量計に、 θ_{s1} [°C] に加熱された質量 m_s [g] の試料を投入し、水をかきまぜて一様になったときの温度を θ^* [°C] としよう。このとき、環境 (注目している水と試料以外の物質からなり、容器、空気、および温度計を含む) に対する熱移動はないものとすれば、試料が失った熱量は、水の得た熱量に等しいはずである。これを**熱量の保存**という。熱量が物体間を移動するときその総量が保存するという概念は、熱量が測定可能な量であるために欠かせない。

上記の場合、試料の温度は $\theta_{s1} \rightarrow \theta^*$ と変化し、水の温度は $\theta_{w1} \rightarrow \theta^*$ と変化する。異なる温度の物体からなる系が、これらの温度差 $|\theta_{s1} - \theta^*|$, $|\theta_{w1} - \theta^*|$ にそれぞれの質量 (試料: m_s , 水: m_w) と比熱 (試料の比熱を c_s , 水の比熱を c_w とする) をかければ、試料が失った熱量と水が得た熱量はそれぞれ

$$m_s c_s |\theta_{s1} - \theta^*| \quad \text{および} \quad m_w c_w |\theta_{w1} - \theta^*| \quad \dots (1)$$

で表される。熱量保存の関係によりこれらは一致するので、試料の比熱は

$$c_s = c_w \times \frac{m_w}{m_s} \times \left| \frac{\theta_{w1} - \theta^*}{\theta_{s1} - \theta^*} \right| \quad \dots (2)$$

で求められることがわかる。単位は水の比熱 (定義により $c_w = 1 \text{ cal/g}^\circ\text{C} = 4.184 \text{ J/g}^\circ\text{C}$) に従う。

実験では、注目する系 (試料と水) がその環境と熱のやりとりをしないことが重要になる。**水熱量計**とは、伝導による外部への熱の出入りをしないよう、**熱伝導性の低い物質** (発泡スチロール等) でできた**断熱容器**で、その中の水温の変化から物質の比熱を求めることを目的とするものである。異なるこのとき、容器の内面や温度計が内部の水とともに温度変化を行うため、それに必要な熱量が無視できるほど小さくなるように設計するか、計算時にこれを考慮して値を修正する必要がある。また、水温が気温より高い場合は湯気の蒸散 (暖かい水蒸気を含んだ**空気の対流**) により熱が環境へ移動するため、容器にふたをするなどしてこ

れを防ぎ、注目する系を閉鎖系にする必要がある。

[理論(2):温度測定と時定数]

温度測定では、温度計の示度は測定対象物体の温度を常に表すのが望ましい。そのためには、温度計は熱伝導性が高く、熱容量(比熱と質量の積)が小さい必要がある。そうでなければ温度計の示度は対象物体の温度に向かってゆっくりと変化し、それらが一致するまで時間がかかる。物体自体の熱伝導性が低いために温度が均一になるまで時間がかかるという場合もある。

アルコール温度計は測温部分(液溜め)は小さくないので、ずっと大きな物体(液体等)が一定の温度のときの測定に適している。一方、サーミスタやICなどの半導体、あるいは白金などの金属は比較的小さな素子が温度センサー(測温抵抗体)として利用でき、応答が速い。

温度計を急に冷たい環境に置くと、温度計から環境へと熱が流れて温度計の温度が下がる。このときの熱の流れの大きさは、環境と温度計の温度差に比例する。温度が近づいて差が半分になると、流れの量も半分になる。これをニュートンの冷却法則という。環境は十分大きく、その温度は一定であるとすれば、この熱の移動は温度計の持つ熱量の変化を表し、温度計の温度の時間変化に比例する。これは環境と温度計の温度差の時間変化とも比例している。

以上の性質は、時刻 t [秒]における温度差を $y(t)$ [deg] とすると、

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{T} \quad \dots (3)$$

という式(微分方程式)にまとめられる。 T を定数(その単位は秒)である。 $t = 0$ s のとき $y(0) = \theta_0$ 、また、時間が十分経過したあとは $y(t \rightarrow \infty) = 0$ であるとする。次の関数はこれらの条件を満たすもの(微分方程式の解)である。

$$y(t) = \theta_0 \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \quad \dots (4)$$

この式の T を時定数と呼ぶ。図1に $\theta_0 = 1$ deg, $T = 20$ s とする場合のグラフの形を示す。任意の時刻 t_1 から $t_1 + T$ になるまでの T 秒間に、この関数の値は $\theta_0 \exp(-\frac{t_1}{T})$ から $\theta_0 \exp(-\frac{t_1+T}{T}) = e^{-1}\theta_0 \exp(-\frac{t_1}{T})$ となる。つまり、

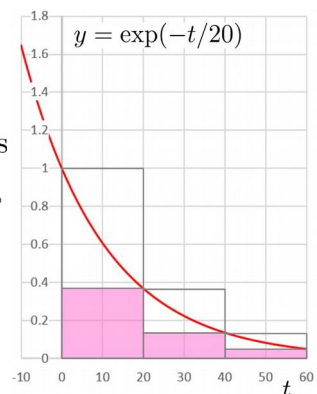


図1

温度計の時定数は、最終到達値との差が $1/e (= 1/2.718 \dots \approx 0.37)$ 倍になるのに要する時間

である。一般に暖かいものが冷めてときの温度計の示度はこの形に従って変化する。一方、温度計を急に θ_0 だけ温度が高い環境(温度一定)に置くと、 $t = 0$ s のときの温度差は0、時間が十分経過したあとは $\Delta\theta(t \rightarrow \infty) = \theta_0$ となる。この $\Delta\theta(t)$ は次の関数を満たす。

$$\Delta\theta(t) = \theta_0 \{1 - \exp(-\frac{t}{T})\} \quad \dots (5)$$

式(4)や式(5)の時定数 T は温度計の熱容量、温度計と環境の間の熱伝達率や接触表面積によって決まる。時定数 T が小さいほどレスポンスが早く、温度計の示度が測定対象の温度を反映していることになる。

抵抗の温度センサーでは素子の抵抗値を測定し、あらかじめ知られた抵抗値の温度変化のデータから温度を求める。抵抗値の測定結果を電子回路に接続し、換算して温度を表示することも容易である。本実験では温度測定を白金薄膜素子の抵抗測定によって行う。白金は安定で純度が維持され、金属の抵抗値に影響を与える不純物や酸化に伴う経年変化などの心配が少ないため、測温抵抗体(あるいはそれを組み込んだ白金抵抗素子)として使われ、工業規格化¹されている。0℃での抵抗値が100Ωの素子が代表

1 日本工業規格 JIS C1604-2013 <http://kikakurui.com/c1/C1604-2013-01.html>

国際規格 IEC 60751-2008 http://webstore.iec.ch/preview/info_iec60751%7Bed2.0%7Db.pdf

的であり、1000 Ωの素子は感度が高い。また、白金の抵抗値は詳細な温度変化がテーブル化され、利用できる。狭い温度範囲であれば、温度 θ [°C]における抵抗値 R [Ω]は、定数 R_0 , α により、

$$R = R_0(1 + \alpha\theta), \text{ あるいは, } \theta = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{R}{R_0} - 1 \right)$$

に従う。この関係は金属でできた抵抗体一般になりたつもので、 α は**抵抗率の温度係数**と呼ばれる物性値である。純度により異なり、また、温度変化するが、白金は $\alpha \sim 0.3851 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ 程度であり、かなり広い範囲ではほぼ一定であることが知られている。 R_0 は $\theta = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$ での抵抗値であり、本実験では 1000 Ωとして販売されている素子を使う。なお、温度と抵抗値の線形関係から、温度 θ_{s1} , θ_{w1} , および θ^* のときの抵抗値をそれぞれ R_{s1} , R_{w1} , および R^* とするとき、

$$\frac{\theta_{w1} - \theta^*}{\theta_{s1} - \theta^*} = \frac{\frac{1}{\alpha} \left(\frac{R_{w1}}{R_0} - 1 \right) - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{R^*}{R_0} - 1 \right)}{\frac{1}{\alpha} \left(\frac{R_{s1}}{R_0} - 1 \right) - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{R^*}{R_0} - 1 \right)} = \frac{R_{w1} - R^*}{R_{s1} - R^*}$$

の関係が成り立つ。この関係は、温度 θ によってプロットしたグラフの形は、測定した抵抗値 R のままプロットしたグラフの形と同じでなることを表している。

[装置]

発泡スチロールカップ、白金温度センサー、ナイロン糸、試料(銅またはアルミニウムの分銅)、デジタルマルチメーター、投げ込み式ヒーター、金属製デューワー、発泡スチロールボックス、電子天秤、気圧計、室温計。

注意 本実験では金属製デューワー 1 台あたり 1 L 程度の水を、投げ込み式ヒーターにより沸騰させ続ける。**デューワーの転倒、およびヒーターの空焚きをしないよう**注意すること。また、適宜、気圧や室温を測定して記録すること。

[実験方法]

実験1 温度センサーの定数 R_0 , α を決定する。これらの定数は個々の温度計ごとに値が異なる。この作業を**温度計の較正**(こうせい、校正と書くこともある)という。較正された温度センサーを用い、抵抗値 R を測定して温度 θ を求める手順を確認する。

1-1 温度計の較正のためのデータとして、二つの温度定点での抵抗値を測定する。温度定点は水の凝固点(発泡スチロールボックス内に用意)と、沸点(金属製デューワー内に用意)を用いる。これらの定義は

水の凝固点	空気中で飽和した水と、氷との間の平衡状態	0 °C
水の沸点	水の 1 気圧での液相と、気相の間の平衡状態	99.974 °C

である。これらの温度で R の値をデジタルマルチメーターにより測定する。その結果から定数 R_0 , α を含む連立方程式ができる。それを解いてこれらの定数を求め、抵抗率の温度係数 α を文献値と比較せよ。

1-2 較正結果が正しいことを確認するため、室温と体温での抵抗値 R を測定し、それらの温度 θ を求める。

実験2 水熱量計に入れる試料と水の質量の測定を測定する。試料と水の温度を測定しながら、水熱量計の中での温度の推移を記録する。水温の時間変化についてのグラフを作成する。

注意 温度はすべて、センサーの抵抗値によって示すこと。温度への換算は指示された場合のみ行えばよい。

2-1 試料(銅またはアルミニウムの分銅)の質量を測り、 m_s [g]を求める。秤量後、それぞれの試料に細い糸をつけ、その1個を金属製デュワー内の水に浸し、投げ込み式ヒーターで水を加熱し始める。

注意 試料がデュワー内の投げ込み式ヒーターに触れると異常に高温になるので注意する。また、沸騰し続けることで水位が低下し、試料が空気中に露出すると水温よりも低温になるので注意する。

2-2 水熱量計(発泡スチロールのカップを2個重ねたもの)の容器の質量 M_{cup} [g]を測る。

2-3 その容器の中に水を入れる。量はカップの半分程度(金属試料を浸して攪拌するとき、金属の露出や水のあふれ出しが起らないような量)とする。水の入った容器全体の質量を測定し、 M_{tot} [g]として記録する。水熱量計に入れた水の質量 m_w [g]を $m_w = M_{\text{tot}} - M_{\text{cup}}$ により求める。

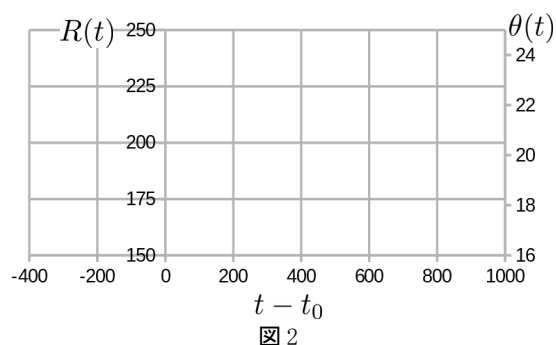
2-4 金属デュワーの中の水が沸騰してから十分な時間がたった後、白金温度センサーを用いて水温を測る。この温度は、水熱量計へ投入する直前の金属試料の温度(抵抗値 R_{s1})として記録する。

2-5 熱量計の水をよくかきまぜながら 15 秒おきに 5 分以上、熱量計の水温を測り、時刻 t (〇時〇分〇秒)、およびそのときの温度(抵抗 $R(t)$)を記録する。

注意 次の試料の移動では、試料について水が熱量計に入るのを防ぐためにティッシュなどで素早く吸い取るが、金属デュワーから出して熱量計の水の中に納めるまでの所要時間が 3 秒程度に収まるよう、作業の予行を行う(この間も 15 秒おきの読み取りを続ける)。また、試料が水面を通過するときや、水を攪拌するときには水滴が飛ばないように注意する。

2-6 時計を見ながら素早く金属試料を熱量計の中に移す。試料を投入した瞬間の時刻 t_0 を記録する。また、試料を軽く上下させることによって熱量計の水をかきまぜながら、熱量計の水温(抵抗 $R(t)$)を t_0 以降は 5 秒おきに読み取り、時刻とともに記録する。温度は急速に上昇するが、すぐ最高値になって、徐々に下がり始める。温度の変化が小さくなったら(5 秒間隔の値が予想可能になったら)、15 秒おきに 5 分間、水温を測り続ける。

2-7 温度の時間変化のデータをグラフにプロットする。このとき、横軸は原点をずらした時間(熱量計への試料投入時刻を原点とする時間 $t - t_0$)、縦軸は温度センサーの抵抗 $R(t)$ をとる。このグラフは水温 $\theta(t)$ を表す。縦軸にとった範囲の抵抗値に対応する水温を 5~7 点ほど、適当に選び、その抵抗値を計算する。これらの抵抗値に目盛り線を引いて水温の値を記入し、第二の縦軸として温度目盛りを添える。(図 2)



実験 3 実験 2 のデータを分析する。特に、水温が室温に向かって低下することを考慮する。金属試料から水への熱移動が仮に瞬時に完了した(そして、温度計の反応が極めて素早い)とするとき、投入直後に想定される一様温度 θ^* での温度センサーの抵抗値 R^* をグラフから読み出し、金属の比熱を求める。

3-1 金属試料を熱量計に入れた後の抵抗値 $R(t)$ は、最高値を示した後、下がり始める。この変化は、温

度計の表示に時間がかかり、示度が θ^* に達する前に室温に向かって放冷し始めていると考えることができる。一般に、冷却している物体の温度の時間変化は、最終的な到達温度から離れている場合は直線的である。そこで、冷却によるグラフの傾向に直線を当てはめて書き込む。

3-2 この直線的を時間軸の負の方向に延長して(これを**外挿**という)、試料を入れた瞬間の温度 θ^* での温度センサーの抵抗値 R^* を求め、グラフに明示する。

3-3 R^* の値を用いて比熱を計算する。得られた結果を、金属の比熱に関するデュロンとプティの理論値 $c_{(\text{Dulong-Petit})} = 3R$ (ただし、 R は気体定数 8.316 J/mol K) と比較する。さらに、この実験で試料から水へと移動した熱量を J (ジュール) 単位で求める。

[参考]

この実験で、最初の水温 θ_{w1} と瞬間的熱移動後の θ^* とが室温をはさんで対称になるように、熱量計に入れる水の温度等を調節すれば、測定精度は更に良くなる。

[標準値]

デュロン=プティの法則は金属の比熱の理論値を与えるもので、デバイ温度と呼ばれる特性温度よりも十分高温では $c_{(\text{Dulong-Petit})} = 3R$ になる (ただし、 R は気体定数 8.316 J/mol K)。あらゆる物質で、低温では比熱は小さくなる傾向がある。

比熱の標準値 (25 °C)	Al	5.82 cal/mol・K (原子量 26.98 g/mol)
	Cu	5.84 cal/mol・K (原子量 63.546 g/mol)

これらの物質の比熱は、25 °Cでは 1 °Cあたり約 0.25 %の割合で変化することが知られている。

[設問]

1. 白金抵抗体の抵抗値の温度変化より、抵抗値が 0 となる温度は何度°Cと推定されるか。各自が行った温度計の較正による抵抗率の温度計数 α があらゆる温度で一定であることを仮定して求めなさい。
2. 式(5)の理論曲線を温度計の抵抗値 $R(t)$ に当てはめることができる。ただし、 θ_0 には $R^* - R_{w1}$ をとる。時定数 T を 10 秒としたときの $R(t)$ の理論曲線を描き、実験データのグラフと比較して、実験における温度計の時定数の大きさについて議論しなさい。

振り子の周期 (測定基礎 4: 高精度測定)

[目的]

一定間隔で繰り返す現象の周期を精密に決定するための手法について、統計処理とともに学ぶ。

To learn how to apply techniques of high-precision determination of a period in repetitive phenomena including the statistical treatment

振り子の周期を精密に測定する意義を理解し、ボルダの振り子によって実験室での重力加速度を求める。

To evaluate the gravitational acceleration at the laboratory by use of a Borda's pendulum with an understanding of importance of the precise determination of its period.

[背景]

振り子の運動は、物体にかかる重力をひとつの支点で支えたとき、その平衡位置の近くで見られる振動運動で、同様な振動現象の中でもっとも身近な現象である。同じ条件で容易に再現されること、また運動の初期条件(初期の振幅等)にはほとんどよらずに等時性が得られ、物理運動の規則性を提示する格好の例として、理科初等教育でも取り上げられる。また、測定しやすい物理量から重力加速度を決定する実験としても代表的なものである。

19世紀前半にはその測定精度を極限まで向上させる実験的努力と、理想的な測定条件での値を求める補正のための理論的・数学的な研究がなされた。その結果、異なる地点で異なる振り子を用いて重力加速度が測定され、十分小さな振れ角、標準温度、真空、平均海面高度という条件での推定値を実験結果から精密に求めたものが比較できるようになった。ヨーロッパ各国から調査隊が派遣され、地球の真の姿を知るための振り子実験が地球上のさまざまな地点で行われた。このとき特に、ひもで吊り下げるタイプの振り子を改良したボルダの振り子と、まったく設計の異なるケーターの振り子とで比較可能な実験結果が得られることが注目された¹。

[理論(1) 単振り子の周期]

小さなおもりを長いひもで吊り下げて振り子にすることを考える。このときおもりの質量中心はひもの上側の支点を中心とした球面の上を動くが、おもりの動き始めを注意深く設定すれば、おもりの質量中心の運動はひとつの鉛直平面に収まる。つまり、ひとつの鉛直な円弧の底に沿って左右に動く。このような動きは、おもりの大きさに比べて支点からおもりまでのひもの長さが十分長ければ容易に実現できる。このような運動をする振り子を**単振り子**という(図1)。

¹ F.Baily, "On the Correction of a Pendulum for the Reduction to a Vacuum: Together with Remarks on Some Anomalies Observed in Pendulum Experiments", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 122 (1832), pp. 399-492. <http://www.jstor.org/stable/pdf/107971.pdf>

単振り子の運動は、鉛直線を基準としたひもの傾き角度 θ が時間 t の関数として

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi_0) \quad \dots(1)$$

の式で表されるという特徴がある。変位(この場合は角度変位)がこのような関数で表される運動を**単振動**という。 ω は角振動数と呼ばれる量で、運動の周期 T とは

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \dots(2)$$

の関係がある。 θ_0 は振れ角の最大値、 ϕ_0 は初期位相と呼ばれる量で、ひものふれ角を θ_0 にしておもりをそっと放ち、その瞬間を $t = 0$ とする場合は $\phi_0 = 0$ である。

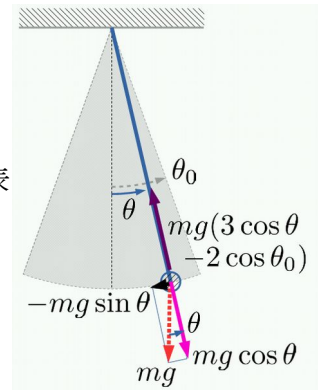


図 1

空気抵抗が無視できる場合、単振り子のおもりに働く力は重力とひもの張力だけであり、そのうち**運動方向**(軌道の円弧に沿う方向)の力は重力のその方向成分だけである。それはおもりの質量を m 、重力加速度の大きさを g とすると $-mg \sin \theta$ とかける。負の符号はこの力が θ の向きとは逆であることを表す。そして角度 θ が小さければ $\sin \theta \sim \theta$ の関係(角度の単位は radian)により、これは $-mg\theta$ に近似できる。

一方、運動方向の加速度成分 a_{\parallel} は軌道となる円弧(半径を L とする)上の速度 $v = L \frac{d\theta}{dt}$ の時間微分に対応し、 $a_{\parallel} = L \frac{d^2\theta}{dt^2}$ で表される。単振動の変位の式(1) すなわち $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi_0)$ が成り立つには

$$a_{\parallel} = -\omega^2 L \theta_0 \cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 L \theta \quad \dots(3)$$

を満たす必要がある。このように、**加速度が変位(ここでは $L\theta$) のマイナス 1 倍に比例する関係を単振動の微分方程式**という。ニュートンの第二法則(運動方程式)と加速度の式(3)により、おもりにかかる正味の力のこの方向の成分は $-m\omega^2 L \theta$ となる。これと式(1)から、

$$g = \omega^2 L = \frac{4\pi^2}{T^2} L \quad \dots(4)$$

という関係が得られる。

周期を精度良く測定するときには、周期 T に対する最大振れ角 θ_0 の依存性に配慮が必要である。 θ_0 が十分小さければ周期は式(2)と式(4)から得られる

$$T_{\theta_0 \rightarrow 0} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \dots(5)$$

与えられるが、厳密には θ_0 が大きくなると T が大きくなる傾向がある。 T に対する θ_0 の依存性は第一種完全楕円積分²と呼ばれる関数 $K(k)$ を使って

$$T(\theta_0) = \frac{2}{\pi} K(k) \cdot T_{\theta_0 \rightarrow 0}, \quad \text{ただし } k = \sin \frac{\theta_0}{2} \quad \dots(6)$$

与えられることが知られている³。式(5)に対する補正係数を表す $\frac{2}{\pi} K(k)$ は次の程度である。

θ_0	=	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
$\frac{2}{\pi} K(k)$		1.00008	1.0003	1.0006	1.0012	1.0019	1.0027	1.0037	1.0049	1.0062

2 CASIO 高精度計算サイト(精度保証計算ライブラリ) <http://keisan.casio.jp/exec/system/1166751749>

3 長島弘幸「振幅振り子の周期」を教えよう」大学の物理教育 1998-1 号 p.42-43, 1998.
<http://ci.nii.ac.jp/naid/110001942984>

なお、力学的エネルギーが保存し、その値が $\theta = \theta_0$ (おもりが静止する) ときの値に等しいことから

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgL(1 - \cos \theta) = 0 + mgL(1 - \cos \theta_0) \quad \dots(7)$$

が成り立つ。ここで、おもりが円弧の軌道を描くため、おもりの加速度には向心成分があり、それは $a_{\perp} = \frac{v^2}{L}$ で与えられることを使えば、式(7)より $a_{\perp} = 2g(\cos \theta - \cos \theta_0)$ が得られる。さらに、重力の向心成分の大きさは $mg \cos \theta$ であり、正味の力の向心成分がこの大きさを持つ ma_{\perp} で与えられるべきことを考えれば、ひもの張力の大きさは $mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$ に従って変化することがわかる。

[理論 (2) 実体振り子の周期]

振り子のおもりが重いとおもりの大きさが無視できなくなる。また、ひもを棒で置き換えた振り子や、物体上の1点を支点とする振り子もある。これらの運動は、その質量中心が支点を中心とする円弧の上で単振動すると同時に、物体が回転するという特徴がある。このような振り子を実体振り子(剛体振り子、物理振り子)という。物体の回転角 θ_{rot} と、質量中心(COM)と支点を結ぶ線分の傾き角度 θ はほぼ同一である。

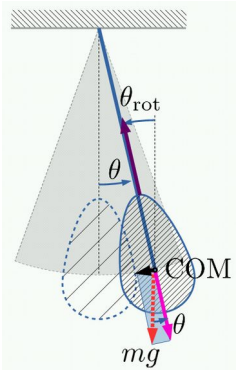


図 2

物体にかかる力は剛体(質量 m)としての質量中心にかかる重力 mg と張力である。張力には、単振り子の場合のように、支点と質量中心を結ぶ直線に沿う成分があるが、剛体の回転運動の変化を説明するためにはそれに垂直な成分も存在する。吊っているものがひもではなく剛体の一部であれば支点到にそのような力がかかる。ひもで吊る場合は一般には $\theta < \theta_{\text{rot}}$ となると考えるべきである。図 2 ではこれらのことを無視して描いた。

この振り子も式(1)で表される単振動を行い、その周期は式(2)で表され则认为られる。質量中心の描く軌道の半径を L とすれば、進行方向に沿う質量中心の加速度は式(3)で与えられ、その原因が重力のこの方向成分だけであるなら、この運動は単振り子と変わらないことになる。一方、剛体が支点周りで回転することを考えるなら、角加速度は

$$\alpha = \frac{a_{\parallel}}{L} = -\omega^2 \theta \quad \dots(8)$$

になる。剛体の運動方程式によれば、この回転運動の原因は支点周りのトルク(力のモーメント)であり、ここでは $-mgL \sin \theta$ (これは、力 $-mg \sin \theta$ と腕の長さ L の積として得る) で与えられる。結果としての角加速度 α に対する比例係数は支点周りの慣性モーメント I である。この I は、剛体質量 m と質量中心の軌道の半径 L 、およびこの剛体の質量中心周りの慣性モーメント I_{COM} によって

$$I = mL^2 + I_{\text{COM}} = mL^2 \left(1 + \frac{I_{\text{COM}}}{mL^2} \right) \quad \dots(9)$$

で与えられる。すなわち、剛体の運動方程式、すなわち「トルク=慣性モーメント×角加速度」から

$$\alpha = \frac{-mgL \sin \theta}{I} = -\frac{g}{L \left(1 + \frac{I_{\text{COM}}}{mL^2} \right)} \sin \theta \quad \dots(10)$$

が得られ、角度が小さいときの近似 $\sin \theta \sim \theta$ を当てはめて式(8)と比較すれば、

$$g = \omega^2 L \left(1 + \frac{I_{\text{COM}}}{mL^2} \right) = \frac{4\pi^2}{T^2} L \left(1 + \frac{I_{\text{COM}}}{mL^2} \right) \quad \dots(11)$$

を得る。物体の質量分布に広がりがあるが I_{COM} が mL^2 に対して無視できない場合、式(4)を式(11)に置き換える必要がある。 g が定数であることを考えると質量が広がることで ω は小さく、周期 T は長くなる。

物体が半径 r の球であり、支点から球表面までのひもの長さが l であるときには

$$I_{COM} = \frac{2}{5}mr^2, \quad L = l + r \quad \dots(12)$$

が成り立つ。

なお、剛体の質量中心の速さが $v = L \frac{d\theta}{dt}$ であることを考えると、運動エネルギーはふたつの部分

$$\text{質量中心の並進運動に関する運動エネルギー} \quad K_{\text{trans}} = \frac{1}{2}m \left(L \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad \dots(13)$$

$$\text{質量中心周りでの回転運動に関する運動エネルギー} \quad K_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I_{COM} \left(\frac{d\theta_{\text{rot}}}{dt} \right)^2 \quad \dots(14)$$

に分けることができる。力学的エネルギー保存則(式(7))はこのことを考慮し

$$\frac{1}{2}m \left(L \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}I_{COM} \left(\frac{d\theta_{\text{rot}}}{dt} \right)^2 + mgL(1 - \cos\theta) = 0 + 0 + mgL(1 - \cos\theta_0) \quad \dots(15)$$

へと修正される。ここで $\theta = \theta_{\text{rot}}$ であるとすれば

$$K_{\text{trans}} : K_{\text{rot}} = mL^2 : I_{COM} \quad \dots(16)$$

となり、運動エネルギーは常にこの比で分割される。以上のことは次のようにまとめることができる。

物体の質量分布に広がりがあり、 I_{COM} が mL^2 に対して無視できない場合、運動エネルギーは並進だけでなく回転もあり、ポテンシャルエネルギーから運動エネルギーに変化する量の一部は必ず回転運動エネルギーになる。これにより並進速度 $v = L \frac{d\theta}{dt}$ は、 I_{COM} が無視したときの $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{I_{COM}}{mL^2}}}$ 倍になる。なお、式(11)はこれにより周期 T が長くなることに対応している。

[理論(3) Borda の振り子]

Borda の振り子は図3のように細い針金で金属球をつるした振り子で、振動の支点は横に倒された三角柱 N の一辺(ナイフエッジ)である。支点が直線になることで振動面の向きが固定される。ナイフエッジは先端が細く、またそれを支える金属板 S の上面も磨かれていて、理想的には摩擦力がはたらかない。したがって、ナイフエッジの置かれる平面は水準器によって完全に水平に調整する必要がある。

おもりは直径 4 cm くらいの一様な金属球である。ひも W は長さ 1 m くらいの細いワイヤである。三角柱 N にはチャック R が固定されていて、チャックを回せば閉まってひもをつかむ。三角柱とチャックの十字の部品には、これだけで振動させたときの周期を調整すべく、上部にねじとナット D がついていて、メロノームの可動式おもりのように、このナットを上にあげると周期が短くなる。このほか、水平に左右に伸びた腕がついていれば、その上の小ナットの位置で左右のバランスを調整し、平衡時に傾いてしまうことが修正できる。

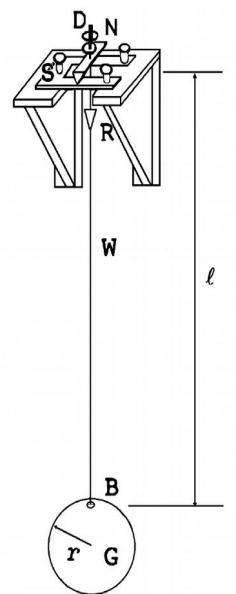


図3

〔装置〕

Borda の振り子 (ひものついた金属球 BW, チャックつきナイフエッジ RND, 調整ねじつき金属板 S, ただし記号は図 3 に示すもの), 四面体型鉄アングル (金属平面 S を乗せる台座) とその固定具 (L 型クランプ), ストップウォッチ, 物指しあるいは巻尺, ノギス, 水準器。

注意 実験は二人の実験者で組になって行う。四面体型鉄アングルおよび L 型クランプは硬く, 重いので移動時には落下させないよう, あるいは扉等にぶつけないよう注意するとともに, 棚や机には静かに載せること。実験機でクランプが使える場所は限られているので, 教員や TA の指示に従うこと。ナイフエッジや金属球が濡れたり汚れたりすると錆を生じ運動に支障をきたすので注意すること。

〔実験方法〕

実験1 実験機の上に Borda の振り子を組み立て, 各種の調整を行う。

1-1 四面体型鉄アングルを L 型クランプふたつで実験機に固定する。実験には高い精度が要求されるため, しっかり固定されたことを確認する。鉄アングルの底面の三角形の 2 頂点が固定されても遠い頂点が浮き上がることがあるので注意する。

1-2 金属板 S を乗せ, その上に水準器を載せる。金属板 S の上面が水平になるように足のネジで調節する。垂直な二方向 (東西と南北) での水平を確認すること。水準器をとり除き, 金属板 S の切れこみに対して直角になるようにナイフエッジを載せる。

1-3 ワイヤ W の一端が金属球に食い込むねじ B で固定され, その接合点が球面上であることを確認した後, もう一端をチャック R で固定する。ワイヤの長さを調整する必要はない。振り子が 10 回振動する時間を測って 10 で割り, 周期の概数 T_1^{approx} を求める。

1-4 チャックのネジをゆるめて針金はずし, チャックつきナイフエッジだけで振動させる。10 回振動する時間を 10 で割った時間 T_{RND} ができるだけ T_1^{approx} に近い値になるように, 上部のナット D の位置を調整する。この効果については, 付録 (1) を参照せよ。

1-5 ワイヤ W がよじれないよう, ていねいにのばしながらその一端を再びチャック R で固定する。

1-6 次の精密な測定の準備として, ワイヤの振動面の背後に紙を貼り, その上に, つりあいの瞬間のワイヤの位置を表す鉛直線を記入する。振動するときにおもりの回転や軌道の膨らみ (楕円軌道) が起こらないようなおもりの放しかたを工夫する。振れ角の最大値 θ_0 を決め, それを実現するための金属球を放す位置を探す。このとき, 式(5)のずれが 0.07% 未満になるよう, $\theta_0 \leq 3^\circ (= 0.052 \text{ rad})$ にする。

実験2 Borda の振り子の周期 T と, そのときの運動の条件となるふたつの長さ l, r を適切な精度で測定する。それぞれの量を多数回測定し, 平均値と標準偏差を計算して, 最確値と誤差を評価する。

2-1 振り子運動の周期を精度良く測定する。一人はつりあい時のワイヤの位置を示す鉛直線の正面から

ワイヤの動きを観察し、左から右へ通過する数をカウントしながら10回毎に、中心を通過する瞬間にストップウォッチの値を読み上げる。測定は190回分の振動まで記録する。もう一人は通過するカウント数を確認しながら、読み上げられた値を記録し、ひとつ前に記録した値との差を即座に計算する。この差(周期10回分, $10T$)の時間差の揺らぎが大きければ測定をやり直す。

周期 T の最確値と誤差は($10T$ ではなく)以下の表を埋めながら10個の $100T$ を求め、 $100T$ に対する平均値 $\overline{100T}$ と標準偏差 $\sigma_{\overline{100T}}$ を計算し、それらの最確値(一般には $\overline{100T}$)と誤差 $\Delta(100T)$ を求める。その結果をそれぞれ100で割り、 $1T$ に対する最確値と誤差を求める。実験例を次表に示す。この表の中の「 $10T$ 差」は測定の異常をチェックするためのものであり、測定中に計算すること。

ラップ時刻①	10T差	ラップ時刻②	10T差	$100T(②-①)$	平均との差の2乗
スタート時 0m00s.00		100T 経過時 3m33s.50	21s.40	3m33s.50	0.0100 s ²
10T 経過時 0m21s.32	21s.32	110T 経過時 3m54s.80	21s.30	3m33s.48	0.0064 s ²
20T 経過時 0m42s.70	21s.38	120T 経過時 4m16s.10	21s.30	3m33s.40	0.0000 s ²
30T 経過時 1m04s.10	21s.40	130T 経過時 4m37s.51	21s.41	3m33s.41	0.0001 s ²
40T 経過時 1m25s.39	21s.29	140T 経過時 4m58s.80	21s.29	3m33s.41	0.0001 s ²
50T 経過時 1m46s.80	21s.41	150T 経過時 5m20s.20	21s.41	3m33s.40	0.0000 s ²
60T 経過時 2m08s.20	21s.40	160T 経過時 5m41s.50	21s.30	3m33s.30	0.0100 s ²
70T 経過時 2m29s.45	21s.25	170T 経過時 6m02s.78	21s.28	3m33s.33	0.0049 s ²
80T 経過時 2m50s.82	21s.37	180T 経過時 6m24s.19	21s.41	3m33s.37	0.0009 s ²
90T 経過時 3m12s.10	21s.28	190T 経過時 6m45s.50	21s.31	3m33s.40	0.0000 s ²
100T の平均				3m33s.400	0.0032 s ²

2-2 振り子をつるしたまま(振動時と同じ張力がかかった状態で)ナイフエッジからおもりの上端までの長さ l を物指しあるいは巻尺で測る。二人でこれを数回繰り返し、1 mm 以内程度でのばらつきで5回以上の測定値を記録する。得られたデータの平均値と標準偏差を計算し、 l の最確値と誤差を求める。振り子を外してから l の読み間違いが見つかった場合は周期の測定をはじめからやり直すこと。

2-3 (振り子をつるしたままでもよい)ノギスで金属球の直径 $2r$ を測定する。水平面内のさまざまな方位や斜めを含むさまざまな箇所測定し、球形であることを確認しながら5回以上の測定値を記録する。得られたデータの平均値と標準偏差を計算し、 r の最確値と誤差を求める。

実験3 実験2の結果から、重力加速度の最確値と誤差を評価し、標準値と比較する。

3-1 式(11), (12)から重力加速度 g を求める。ここでは式変形により、

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \left(L + \frac{2r^2}{5L} \right) \text{ ただし, } L = l + r \quad \dots(17)$$

として T, l, r の最確値を代入し、計算する。

3-2 T, l, r の誤差 $\Delta T = \frac{1}{100} \Delta(100T), \Delta l, \Delta r$ を評価し、重力加速度の誤差 Δg を計算する。伝播

誤差の式について付録 (2)を参照のこと。

3-3 重力加速度 g の最確値および誤差と標準値(千葉では $g = 979.78 \text{ cm/s}^2$)との関係について論じる。

[付 録 (1): チャックつきナイフエッジの周期]

チャックつきナイフエッジ (RND) だけで振動するときの周期 T_{RND} が振り子の周期 T に一致しない場合、支点と金属球の質量中心 COM を結ぶ線分(長さ L)からチャック(ワイヤとの接続部) R の位置が外れることがある。このときワイヤの張力には長さ L の線分に垂直な成分が生じ、これは振り子の運動速度に影響を与え、運動を速くしたり遅くしたりする変調の原因となる。同じことは、金属球のワイヤとの接続部 B でも生じる。これらの変調を生じさせないためには金属球から手を離すときに、点 R や点 B で屈曲するような振動モードを生じないよう、静かに注意深くする必要がある。これらのモードは互いに励起しあうため、調整により周期が操作可能な点 R で屈曲するモードを押さえ込むことが大切である。

[付 録 (2): 伝播誤差の式の導出]

式(17) は

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \left((\ell + r) + \frac{2r^2}{5(\ell + r)} \right)$$

であり、これを T, ℓ, r で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial T} &= -2 \frac{4\pi^2}{T^3} \left((\ell + r) + \frac{2r^2}{5(\ell + r)} \right) &&= -2 \frac{g}{T}, \\ \frac{\partial g}{\partial \ell} &= \frac{4\pi^2}{T^2} \left(1 - \frac{2r^2}{5(\ell + r)^2} \right) &&= \frac{1 - \frac{2}{5}\alpha^2}{1 + \frac{2}{5}\alpha^2} \cdot \frac{g}{\ell + r}, \quad \text{ただし, } \alpha = \frac{r}{\ell + r} \\ \frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{4\pi^2}{T^2} \left(1 + \frac{4}{5} \frac{r}{\ell + r} - \frac{2}{5} \left(\frac{r}{\ell + r} \right)^2 \right) &&= \frac{1 + \frac{4}{5}\alpha - \frac{2}{5}\alpha^2}{1 + \frac{2}{5}\alpha^2} \cdot \frac{g}{\ell + r} \end{aligned}$$

である。これを伝播誤差の一般式

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T} \Delta T \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \ell} \Delta \ell \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial r} \Delta r \right)^2}$$

に代入すると、誤差を評価するための式が得られる。ただし、実際には $\ell \sim 1 \text{ m}$, $r \sim 2 \text{ cm}$, したがって

$\alpha \sim 0.02$ である。また、誤差の有効桁数は2桁程度でよい。これらのことから

$$\ell + r \doteq \ell, \quad \frac{\partial g}{\partial \ell} \doteq \frac{\partial g}{\partial r} \doteq \frac{g}{\ell}$$

としてもよい。このとき

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{4 \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^2 + \frac{(\Delta \ell)^2 + (\Delta r)^2}{\ell^2}} \quad \dots(18)$$

となるが、さらに、測定精度について $(\Delta \ell)^2 \gg (\Delta r)^2$ が成り立つなら次式を用いてもよい。

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{4 \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^2 + \left(\frac{\Delta \ell}{\ell} \right)^2} \quad \dots(19)$$

〔設 問〕

1. 測定した振り子の運動における, 質量中心の並進運動に関する運動エネルギー K_{trans} と, 質量中心
周りでの回転運動に関する運動エネルギー K_{rot} の最大値を求めなさい。ただし, $\theta = \theta_{\text{rot}}$ とする。また,
ポテンシャルエネルギーの最大値を評価し, 金属球の質量中心 COM が最下点にあるときと最も高い位置
にあるときの高さの差を求めなさい。
2. 得られた重力加速度を使い, 単振り子の周期公式(式(5))にあてはめたときの周期を求め, 実験結果の
振り子周期と比較し, それらの差異と測定誤差との関係を論じなさい。
3. 実験で設定した θ_0 に対応する $k = \sin \frac{\theta_0}{2}$ の値と, そのときの第一種完全楕円積分 $K(k)$ の値から, 振
幅をゼロにした極限のときの振り子の周期を求め, 実験結果と比較し, それらの差異と測定誤差との関係を
論じなさい。

マイクとオシロスコープ (測定基礎 5: 音声信号)

[目的]

発信器を使って振動数を指定した電気信号を発生させ, その音を聞く

To hear different sounds with specified frequencies by use of an electric signal generator

さまざまな電気信号の時間変化のようすを波形として表示させるオシロスコープの使い方を習得する

To master how to use an oscilloscope which displays the temporal change of electric signals

振動数が単純な整数比となるふたつの音が協和的な関係であることを確認する

To confirm that two sounds with a simple integer ratio of frequencies are harmonious

整数比の振動数をもつふたつの正弦振動によって生成されるリサージュ図形を観察する。

To observe Lissajous figures created by two sinusoidal oscillations related by an integer ratio of frequencies

圧電素子あるいはエレクトレット・コンデンサーによるマイクを使用し, さまざまな母音や高さの声を波形として観察する

To observe waveforms of voices with different vowels and pitches using a microphone with a piezoelectric device or an electret condenser

[理論(1) 音とマイク]

ひとのからだでは, 耳に伝わった音は鼓膜を振動させ, 蝸牛という器官に振動が伝わると, そこで神経細胞を刺激し聴覚神経の上を電気信号に変換されて脳へと送られる。そのようなひとの聴覚システムをまとめて「耳」と呼ぶこともある。技術世界でそれに相当するものが**マイク**であり, 音を受けて振動する膜や面を備え, その振動を電気信号に変換する素子, あるいは装置である。音から変換された電気信号を, **音声信号**という。

マイクで作られ出された音声信号の電圧はすばやく(1秒間に数百回以上)なめらかに変化するアナログ信号である。スピーカーを鳴らすために音に変換される電気信号も同様である。一方, 近年の音響・映像装置で記録・保存したり再生・演奏したりする場合, 雑音の混入がなく, 信号の品質が劣化しないデジタル信号に変換されている。デジタル信号はコンピューターのファイルのように管理される。音声信号のファイルには, デジタル信号への復元方式(コーデック)や記述方式(コンテナ)により, 多数の形式(フォーマット)がある。ファイル形式はファイル名の拡張子として明示され, *.wav, *.wma, *.mp3, *.aac 等がある。また, 音声ファイルをコンピューターやタブレット上で再生・分析・変換・編集することも最近では容易である。フリーのものも含め, さまざまなソフトウェア¹が利用できる。

¹ 波形表示および周波数成分の表示をリアルタイムに行うフリーソフトの例として, 高速リアルタイム スペクトラムアナライザー「WaveSpectra」 <http://efu.jp.net/soft/ws/ws.html>

分析したい音声信号をマイクでとらえるには、センサーとしてのマイクと、音声信号を増幅するアンプ、ファイルへの変換・保存を行うPCなどが必要である。ノート型PCやボイスレコーダー、あるいはスマートフォン等、マイクやアンプが内蔵され一体化しているものも多い。それらは想定されている装置の利用に適するよう、形や信号の大きさが設計されている。しかし、特定の位置での局所的な音声(たとえば話者の口元の音だけ)を拾い出すにはマイクを外付けする必要がある。PC等に直接外付けできる小型マイクはコンデンサー・マイクである。

PCやボイスレコーダーなどの装置に外付けマイクを接続するには、MIC端子(あるいは、ヘッドフォンとマイクが一体になったヘッドセット用の端子)にコンデンサー・マイク(あるいは、それがついたヘッドセット)の3.5 mm φ プラグを挿入する。多くの装置では「ジャック検出を有効」にすれば自動的に挿入を検出して内部マイクを切り離すなどできるが、そうでなければ内部と外部のマイク(録音装置)を切り替えるためにデバイス設定メニューを立ち上げて、自分で設定する必要がある。また、オーディオ関係の端子の規格は完全には共通化されていないため、装置内部の配線や電源供給の有無の違いにより、装置とマイクの組み合わせには使えるものと使えないものがある。

最も一般的な規格では、MIC端子とヘッドセット端子のアイコン、プラグ(コードの先端の凸部)、および装置側のジャック(凹部)とその装置内部への配線は、次に示すようになっている。



なお、マイク信号入力の端子には、コンデンサー・マイクを動作させるのに必要な電源(+2 V程度)が装置の内部から供給される。マイク本体にこの電源が用意されていれば、PC等の装置に接続しなくてもマイクを動作させることができる。なお、LINE IN 端子も信号入力用であるが、電源は内部から供給されない。

[理論(2) オシロスコープ]

振動する現象を電気信号に変換し、縦軸 y に電圧、横軸を時間 t にとり、信号波形 ($y-t$ グラフ) を表示する装置をオシロスコープという。二つの信号入力 (Ch1, Ch2 と略記する) があるときには、一方あるいは両方の $y-t$ グラフを重ねて表示する機能 (YT-モード) があるほか、Ch1 の信号を $x(t)$ 、Ch2 の信号を $y(t)$ として $x-y$ グラフを表示する機能 (XY-モード) もある。

オシロスコープの画面は図1のように 1 cm 程度の区画で分割されており、その一区画の長さに対応する電圧あるいは時間を切り替えることによって、全体の波形を見たり細部を拡大したりでき、また、時間の経過とともに表示を更新するため、きわめて広い活用範囲がある。

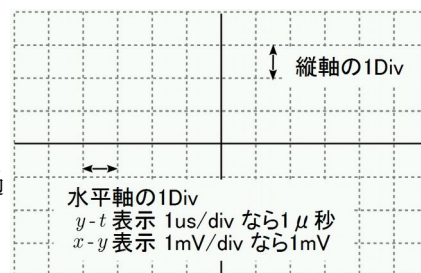


図 1

時間変化する電気信号は正にも負にも変化する。それを伝えるリード線は赤・黒の二本ではなく、信号線とシールドの二つの導線が絶縁体

にはさまれて一体になった同軸ケーブルを用いる。同軸ケーブルの中心導体（信号線）は信号を伝え、それを囲む筒状の導体（シールド）は外部ノイズの混入を遮断する役目を兼ねている。オシロスコープにつなぐ端子と反対側には測定用のプローブ（図2）が付いていて、とがった先端は信号線に、横から出ている黒色リード線はシールドにつながっている。プローブ

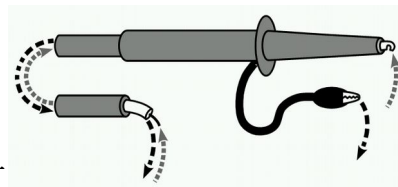


図 2

ブの軸には電圧を変換する回路素子が入っていて、オシロスコープに実際の電圧のまま（×1）あるいは1/10にした電圧（×10）を渡すので、正しい電圧を表示するにはこのプローブの設定をオシロスコープに反映させる必要がある。

オシロスコープで波形の描画を開始するきっかけをトリガ（trigger）という。たとえば正弦波形の信号なら、ゼロの値を負から正に横切るのは周期の中で1回だけであり、このタイミングでトリガをかけ、重ねて描画すると波形は前のものと重なる。信号にノイズが重なるためにトリガがずれると、波形は太く描かれる。

デジタル・オシロスコープでは、時間変化する信号をメモリーに一時保存し、そのデータから液晶などのディスプレイ画面に描画するため、単発波形の取り込みや表示の一時停止の機能がある。これに対し、ブラウン管（Cathode-Ray Tube, CRT）を表示画面として持つアナログ・オシロスコープでは、画面の背後から電子ビームを画面裏側に当てて点状に光らせ、その点の垂直位置を入力信号に比例させながら水平に掃引（sweep）する。電子に磁場や電場をかけてそのように制御する機構は重要であり、また、アナログならではの画面の表現（線が重なるとその密度を反映した強さで表示される）も利点がある。どちらのオシロスコープも、変化を高速でとらえて分解する能力には限界があり、この能力で装置のクラスが示される。

[理 論(3) リサージュ図形]

2つの正弦振動を平面上の直交座標としてプロットしたものをリサージュ図形という。ふたつの振動が

$$x = A \cos(2\pi f_1 t), \quad y = B \cos(2\pi f_2 t + \phi) \quad \dots(1)$$

で与えられるとき、これらを x, y 座標とする点は、振動数比 $f_1 : f_2$, および位相差 ϕ の値²に応じて図3に示すような特徴的な図形になる。特に $f_1 = f_2$ のときは

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \phi = \sin^2 \phi \quad \dots(2)$$

が成り立ち、リサージュ図形はいろいろな位相差 ϕ に対して一般には楕円または直線になる。

オシロスコープの XY-モードは、水平、垂直軸の電圧としてこのような変位 x, y を与えることにより、画面上にリサージュ図形を描くことができる。

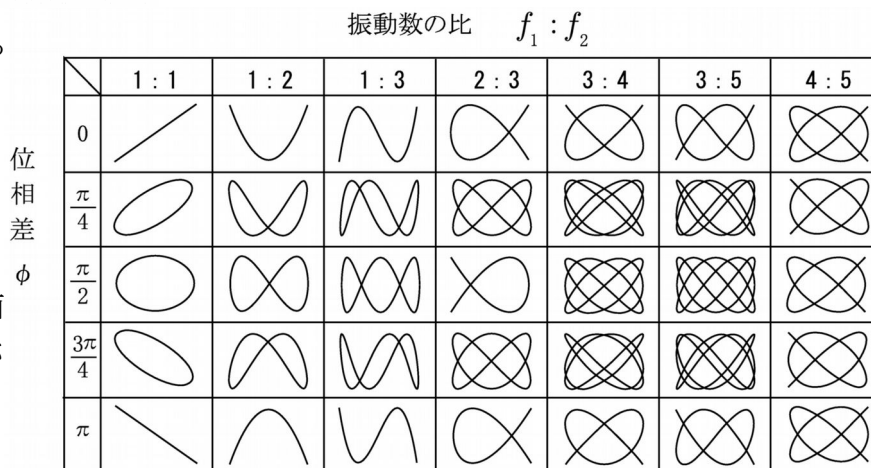


図 3

2 振動数が有理数比からわずかにずれているときには「位相差」が時間とともに次々変化して見える。この点については以下を参照せよ。 <http://www.e.chiba-u.jp/~tkato/EP/Lissajous/lissajous.html>

〔実験器具〕

発信器(品名:Fird W.Gen), 発信器附属品(表示器, 電源延長コード, 専用 AC/DC アダプタ), デジタルマルチメーター(品名:SANWA PC510, 以下 DMM), コイル, フェライト磁石, 紙コップ, デジタルオシロスコープ(品名:OWON HDS1022M, 以下 HDS: ハンドヘルド・デジタル・ストレージ), HDS 附属品(プローブ 2 本, 専用 AC/DC アダプタ), 圧電素子, 音叉, 音叉用ハンマー。

〔実験手順〕

実験 1 発信器の操作に慣れるために, 指定された振動数の音を発生させて耳で確かめる。実験結果としては設定値とそれによる観察事項を記録する。

1-1 後述の『付録 1 発信器 W.Gen の操作方法』を読み, 発信器のコードの接続を行う。紙コップの中にフェライト磁石を入れ, 紙コップの外側にはコイルの磁極をつけて, 紙コップの壁面をはさんでコイルの磁極に磁石を貼り付ける。発信器の出力をコイルに接続し, コイルに生じる振動磁場によって紙コップの壁面が振動するようにする。

1-2 音叉の側面に書かれている振動数に設定する。音叉をたたいてその音を耳で聞く。紙コップを用いて発信器の生じる音を耳で聴き, 比べる。

1-3 発信器の設定を任意の振動数(たとえば 100 Hz)にし, それを基準として $3/2$, $4/3$, $5/4$, $6/5$ 倍など有理数倍の振動数の音と基準の音を聞き比べ, 振動数比と音程の関係を調べる。備考の表 1 には「ラ」の音を基準の 440 Hz に取った場合の, いくつかの音階上での音の振動数が与えられている。

1-4 ひとの可聴音域は振動数で 20 Hz~20 kHz 程度であり, 人により(特に高音限界は年齢により)異なる。自分の可聴音域を確認する。また, より低振動数に設定するとコイルの磁場が紙コップの壁面をたたく打音が聞こえる。振動数を 1 Hz から 50 Hz へ徐々に上げたとき, 打音が低い音に変化することを確認する。

実験 2 オシロスコープの Y-T-モードを用いて異なる振動数の正弦波信号を波形を並べて表示する。また, X-Y-モードに切り替えてそのリサージュ図形を観測する。

2-1 実験者二人でペアになり, 後述する『付録 2 HDS のオシロスコープ機能の操作方法』を読んで, 二台の発信器 1, 発信器 2 から入力している信号を表示する。ただし, ここでは発信機の正弦波出力をオシロスコープに接続して波形観察をし, 矩形波出力を DMM に接続して周波数モニターを行う(通常とは逆)。以下, その手順を示す。

2-1-1 発信器 1 の AC/DC アダプターをコンセントタップから外し, コイルも外す。

2-1-2 発信器 1 の黄・黒の矩形出力を DMM に接続する。DMM の選択レンジを交流 V に合わせ, [Hz] ボタンを押す。

2-1-3 プローブ(赤いマーク入り)を CH1 に接続し, プローブの信号・シールドを発信器 1 の青・黒の出力端子に接続する。プローブ軸の設定は $\times 1$ とする。これに対応するオシロスコープ側の設定は, MENU \rightarrow CH1SETUP で F3 を数回押し, $\times 1$ Probe にすればよい。

2-1-4 発信器 2 も同様に、プローブ (青いマーク入り) を通して CH2 に接続する。

2-1-5 オシロスコープの初期設定 (YT FORMAT: 横軸が時間, 縦軸が電圧) でグラフ表示を確認する。

2-2 MENU → DISPSET を選択して F3 を 1 回押し, XY FORMAT にする。ふたつの発信器の振動数を簡単な有理数倍の関係³に設定すると, リサージュ図形が画面に現れる。テキストのリサージュ図形が現れることを確認しなさい。

実験 3 圧電素子あるいはエレクトレット・コンデンサーを用いたマイクで音声信号をとらえ, オシロスコープで観察する。

3-1 一人一台ずつの配置に戻る。オシロスコープは YT FORMAT にする。実験 2 と同様に, 発信器の正弦波出力 (青・黒) はオシロスコープで観察するため, プローブ (赤いマーク入り) を通して CH1 に接続する。また, 矩形波出力 (黄・黒) は周波数モニターをするため, DMM に接続する。

3-2 オシロスコープのプローブ (青いマーク入り) を通して CH2 にマイクを接続する。発信器の黄・黒の出力端子に一時的にコイルを接続し, 紙コップや磁石を使って音を出したり, 音叉やキーボードを用いて音程を確認したりしながら, 一定の高さの音を出して音声信号の音源とする。

3-2A: 圧電素子を使う場合: 圧電素子の出力端子は, 赤がセンサー, 黒がそれを取り囲むグランドになっている。これらの出力の赤をオシロスコープの信号線, 黒をシールドにつながるようにプローブに接続する。逆にすると電磁ノイズが多く, 音声信号とは無関係の波形を示すことになる。紙コップの底に圧電素子を置き, 中に磁石を入れ, 紙コップの底面をはさんで圧電素子を磁石に貼り付けると, 紙コップが集音器付きマイクとなる。

3-2B: エレクトレット・コンデンサー・マイク (ECM) を使う場合: 電源付きのもので 3.5mm φ プラグが端子であれば, T (先端) をオシロスコープの信号線, S (根元) をシールドにつながるようにプローブに接続する。電源付きでなければ図 4 に例示するような電源と低周波カット回路をはさむ。

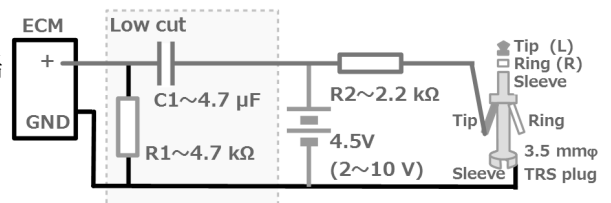


図 4

3-4 発信器の波形と自分の声の波形を同時に表示して, RUN/STOP ボタンで一時停止やその解除をしながら, スケッチあるいは写真撮影で記録する。各記録にはその波形の観察条件として, 画面左下に表示されている次の三つの表示パラメーターを必ず記載すること。

縦軸 (電圧) の 1 div の値 CH1 (赤色) の数値と電圧単位,

CH2 (青色) の数値と電圧単位

横軸 (時間) の 1 div の値 M (紫色) の数値と時間単位

3-5 母音の種類と音の高さを変えて観察・記録を繰り返す。周りの人とデータを交換し, 同じ母音・同じ音での人による違いや男声・女声での違いやなどを観察する。

3 ふたつの振動数が 0.1 Hz ずれていたなら 10 秒 を周期とする変動が, 0.01 Hz ずれていたなら 100 秒 を周期とする変動がみられることが予想されるが, 設定値が一致していても変動が見える場合は, 使用している 2 台の発信器の基準振動数がずれていることを意味する。

[設問]

式(1)に対して、振動数比 f_1, f_2 を 1:3, 2:3, 3:4, 3:5, 4:5 のいずれかに設定した上で、位相差 ϕ も適当な値に設定し、さらに時間を「刻み Δt の整数倍」すなわち $t_i = i \cdot \Delta t$ (ただし、 $i = 0, 1, 2, \dots, i_{\max}$) に置き換えて、振幅が等しい ($A = B = 1$) の場合の座標

$$(x_i, y_i) = (\cos(2\pi f_1 t_i), \cos(2\pi f_2 t_i + \phi))$$

を具体的な数値として求め、 xy 面で座標 (x_i, y_i) をプロットし、それらをなめらかに結ぶことでリサージュの曲線が再現される⁴ことを、図3より3つ程度、例として図示しなさい。

ただし、リサージュの曲線が閉じるために、全時間幅 $i_{\max} \cdot \Delta t$ は各周期 $T_1 = 1/f_1, T_2 = 1/f_2$ の公倍数である必要がある ($\phi = 0, \pi/2, \pi$ を除く)。たとえば $f_1 = 100$ Hz, $f_2 = 150$ Hz では $T_1 = 1/100 = 0.01000$ s と $T_2 = 1/150 = 0.00667$ s であるから、全時間幅は最小公倍数 $1/50 = 0.02000$ s にとる。これを時間幅 $i_{\max} \cdot \Delta t$ として、プロットした点は

$i_{\max} = 50$ とすれば $\Delta t = 1/2500$ s であり、 T_1 を 25 分割、 T_2 を 16.67 分割するため、なめらか

$i_{\max} = 18$ とすれば $\Delta t = 1/900$ s であり、 T_1 を 9 分割、 T_2 を 6 分割するだけなので、粗い

という特徴が予想できる。

4 Excel 等の表計算ソフトを使用する場合は下記ワークシートのプロトタイプを参考に、分割数を 30 以上にすること。
<http://www.e.chiba-u.jp/~tkato/EP/Lissajous-test.xls>

付録1 発信器 W.Gen の操作方法

接続の注意事項

- コードの接着部分が剥がれやすいので、ていねいに扱うこと。
- 正常な動作時は初期出力の振動数が約 200 Hz である。
- 電源コードの接触不良が起こると、その後接続しても発信器は正常な動作をしない。その場合、数秒間電源を外せば復帰できる。

接続方法

- 発信機側面の端子に表示器をつなぐ。黄黒コード(電流出力用 2.5 V 矩形波)をコイルにつなぐ。青黒コード(モニター用 0.25 V 正弦波)をDMMに接続する。
- DMMの選択レンジを mV 交流 に合わせ、電圧測定を行う。
- 発信器には ON/OFF スイッチがない。配線が正しいことを確認し、赤黒コード(電源入力用)を電源延長コードを介して直流電源に接続する。AC/DC アダプタを利用する場合はそれをコンセント・タップに差し込む。

発信機テストの例

- DMMの [Hz] ボタンを押し、周波数を測定する。発信器の出力操作(注 1)に慣れるため、下記の操作例に従って、振動数を 300 Hz に変更し、さらに 100 Hz に設定する。
- 紙コップの中に入れた磁石に磁力で貼り付ける。紙コップからは発信器の出力振動数の音が聞こえる。音を消すには、コイルと紙コップを離せばよい。振動数と音程の関係は『備考:音階と振動数比』を参照せよ。

振動数の設定

- 選択されている位の数値を、ボタンのクリックにより ± 1 ずつ変更する。クリックの認識には時間がかかるので、ゆっくり・しっかり押すこと。
- 操作に慣れるまでは振動数モニターの表示で確認しながら行うこと。
- **【位の選択】** 初期設定では 1 Hz の位(桁)が選択されている。[inc]を1回押すと10倍、[dec]を1回押すと10分の1の位が選択される。押す回数を間違えると、予想しない位が選択されるので注意する。
- **【数値の変更】** 選択している位に関して、[UP]を1回押すごとに +1、[DOWN]を1回押すごとに -1 だけ、数値が変更される。[DOWN]で負になるような操作をしたときは無視される。
- **【表示器のコード】** 表示器は通常、左に位のコード、右に位の値を表示するが、クリック入力がいっぱいと、流れる表示ですべての位を示したのち、省エネモード(消灯)に移行する。位のコードは、3 が百の位、2 が十の位、1 が一の位、- が小数第一位、= が小数第二位である。

操作例

初期状態 (199.00 Hz) から、200 Hz, 300 Hz, さらに 100 Hz へと変更する場合

- (1) [UP] を 1 回押すことにより、200 Hz に設定値を変更する。
- (2) [inc] を 1 回押すことにより、10 Hz の位を選択する。
- (3) [UP] を 10 回押し、210, 220, … 290, 300 Hz と設定値を変えていく。
- (4) [inc] を 1 回押し、[DOWN] を 2 回押すと、100 Hz に設定される。

発信器

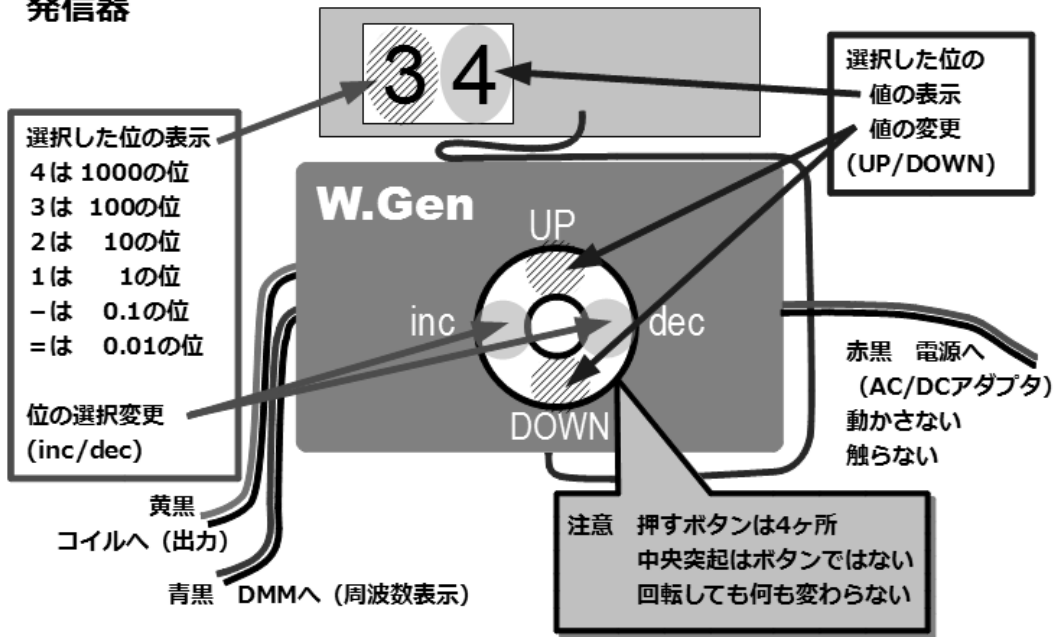


図 発信器 W.Gen

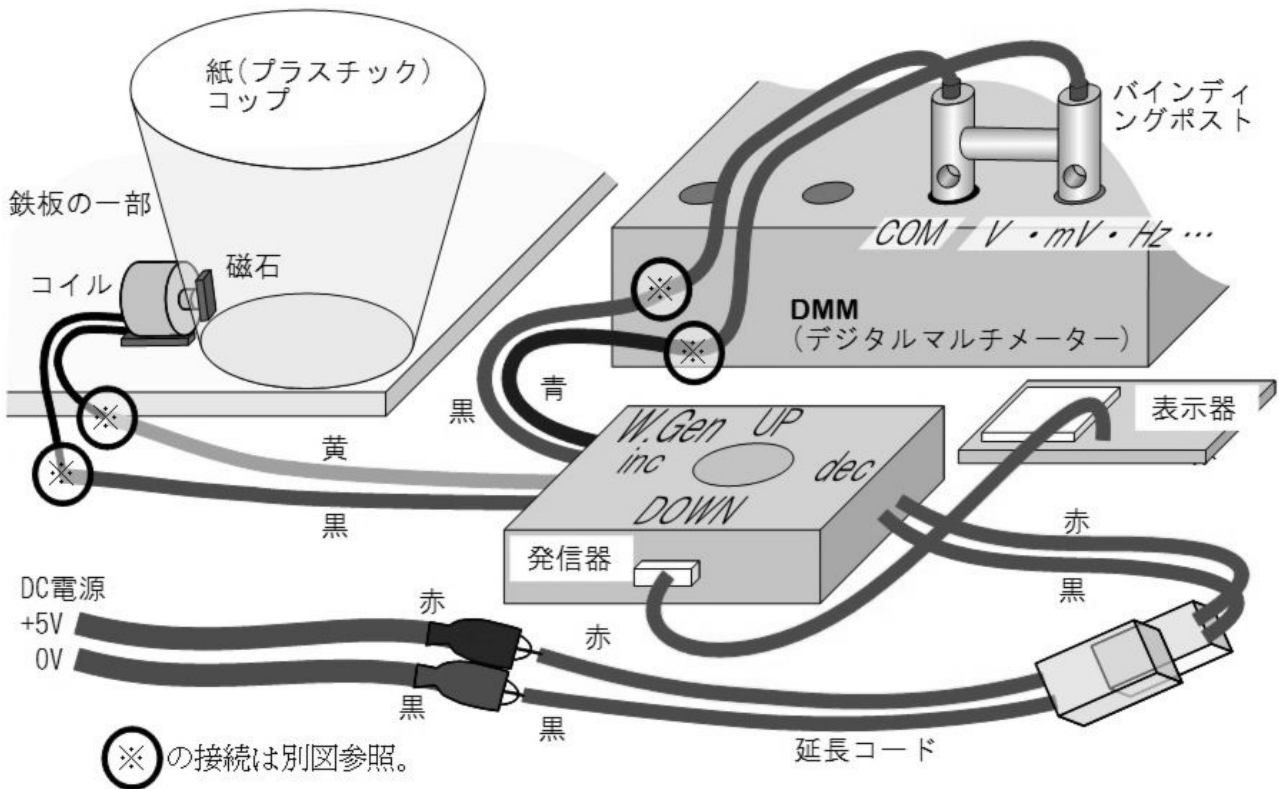


図 発信器による振動発生へのテスト



図 発信器のコードの先端にミノムシクリップを差し込む

付録2 HDS のオシロスコープ機能の操作方法

主要キーとその機能および表示位置

- 電源キー 電源の ON/OFF
- ファンクションキー [F1]⇒[F5] メニューで設定された機能の実行
[MENU] メニュー表示 呼び出し
[△][▽] メニュー表示 カーソル移動キー
- オプションキー [←][↑][↓][→] グラフの縮小拡大・シフト
[OSC/OPTION] オプションキーの機能変更
[←][→] 時間軸の縮小拡大/左右シフト
[↑][↓] 電圧軸の縮小拡大/上下シフト

一般的操作手順 (CH1 拡大⇒CH2 拡大⇒時間拡大⇒観察・スケッチ)

- [OSC/OPTION] 数回押して -CH1 Volts/Div を選択
- [↑][↓] 数回押して [CH1 500 mV]
- [OSC/OPTION] 数回押して -CH2 Volts/Div を選択
- [↑][↓] 数回押すと [CH2 500 mV]
- [OSC/OPTION] 数回押して -TimeBase を選択
- [←][→] 数回押すと [M 1.0 ms]
- RUN/STOP 一時停止・再開

その他機能

- Menu=TRIG MODE, F3=Source トリガー・ソースの切り替え
- AUTOSSET 自動設定
- Menu=FUNCTION, F1=Recall Factory 設定の初期化

デジタル・オシロスコープ

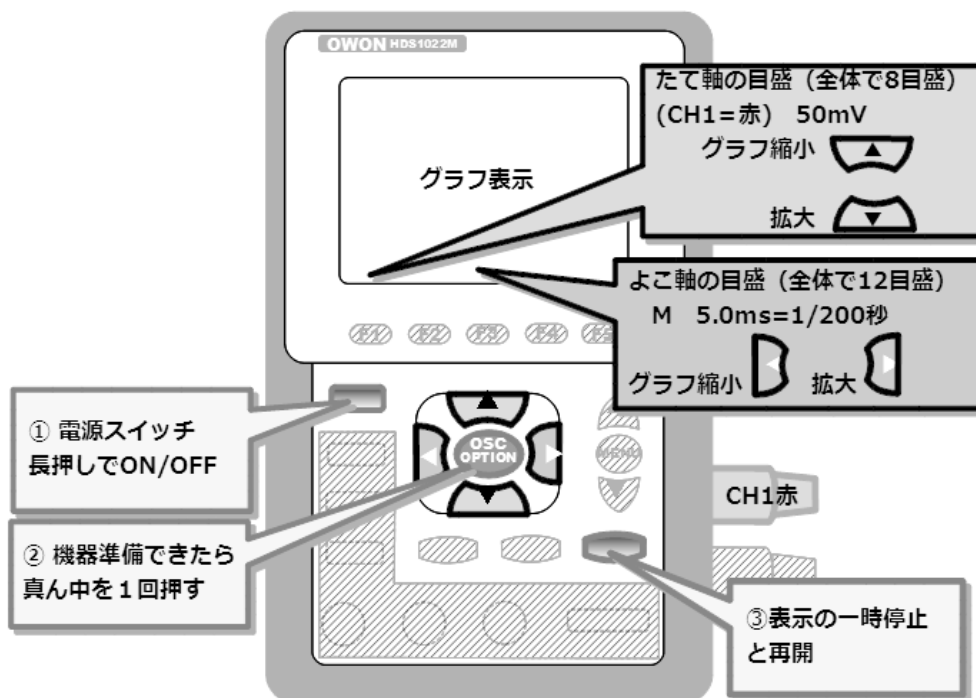


図 HDS のオシロスコープ機能の基本

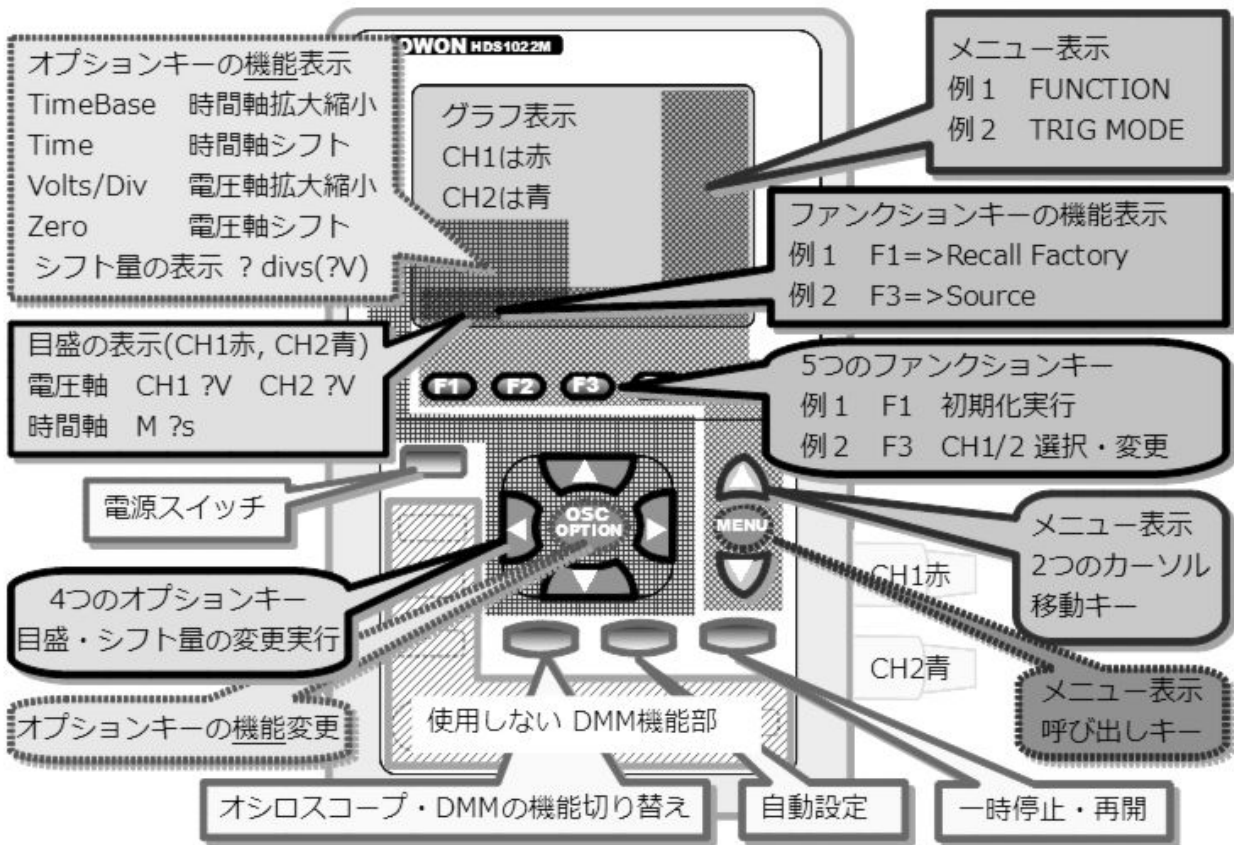


図 HDS のオシロスコープ機能の操作の詳細

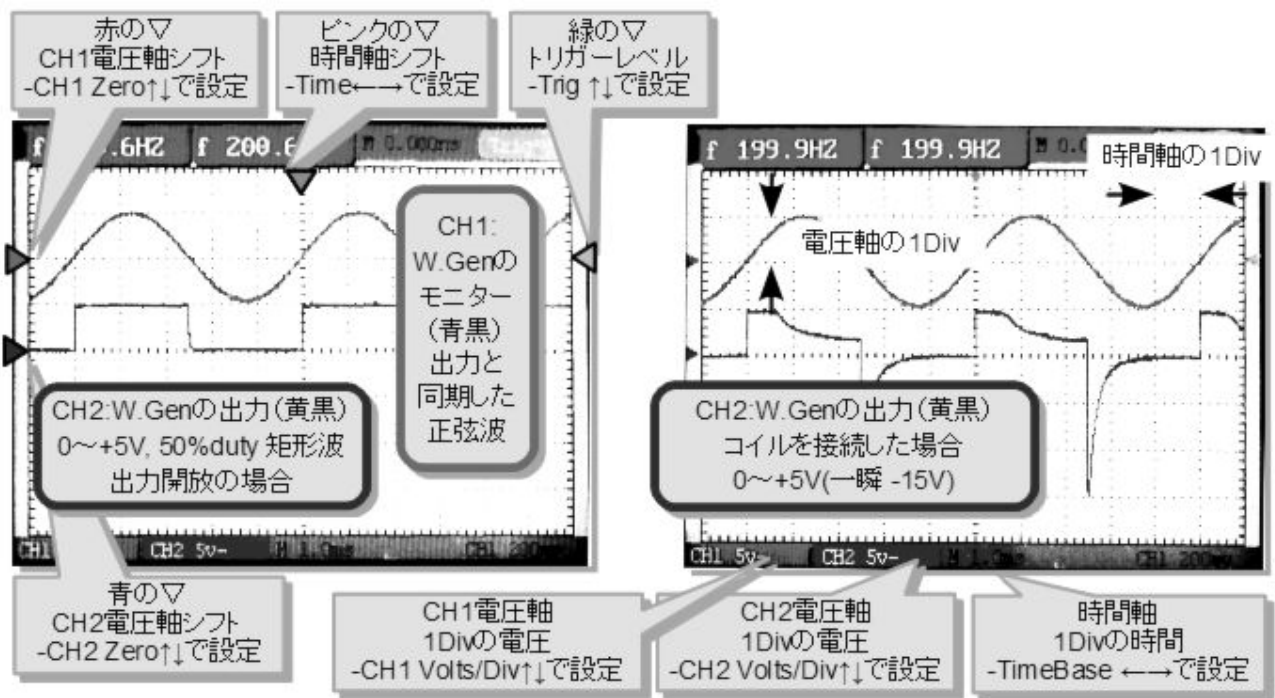


図 HDS のオシロスコープ機能での表示例 (信号は W.Gen の出力)

備考 音階と振動数比⁵

ひとつの弦からなる楽器をモノコードという。弦にかかる張力を一定に保ち、駒の位置を変えて(長さ L を変えて)弾いたとき、整数比で分割した一部分が鳴る音の高さは、残りの部分が鳴る場合と響きあう音程となる。主な整数比は

- 1:1 分割長さは $1/2$ と $1/2$, 元の長さの音より両方とも 1 オクターブ高い
- 2:1 分割長さは $2/3$ と $1/3$, 元の音より五度上と, そのオクターブ上 (例:ド→ソ+ソ)
- 2:3 分割長さは $2/5$ と $3/5$, 元の音より六度上と, その五度上 (例:ド→ラ+ミ)

である。現代的には、より一般的に議論できる振動数で比をとる。振動数 f と長さ L は逆数の関係 $f = v/2L$ がある。ただし、 v は弦に伝わる横波の速さで、一般には振動数 f に依存しない。

長さを繰り返し $2/3$ 倍し、必要に応じてオクターブ低くすることにより、1 オクターブ中にある音すべて (ピアノの白鍵 7+黒鍵 5 と対応する 12 音) が得られる。紀元前 580 年頃生まれたピタゴラスが示したというこの**ピタゴラス音階**は数学的に美しいものの、三度 (例:ド→ミ) が美しく響かないなど、音楽的感觉とは少しずれている。紀元 140 年頃のプトレマイオスは、少しだけ整数比の数を増やすことで美しい三度の響きを得られることを使い、E, A, B の音を少し低めにとった。これは**純正調音階**として知られている。なお、現在ピアノなどでは、転調のしやすさを優先し、等比級数に基づく**平均率音階**が用いられている。

最高に美しいハーモニーを響かせるためには、響きあう音のあいだの音程は純正調音階に近いものでなければならない。

音名	C(ド)	D(レ)	E(ミ)	F(ファ)	G(ソ)	A(ラ)	B(シ)	C(ド)
ピタゴラス音階	1.0000 1	1.1250 $9/8$ $= \frac{1}{2}(\frac{3}{2})^2$	1.2656 $81/64$ $= \frac{1}{2^2}(\frac{3}{2})^4$	1.3333 $4/3$ $= 2 \times \frac{2}{3}$	1.5000 $3/2$ $= \frac{3}{2}$	1.6875 $27/16$ $= \frac{1}{2}(\frac{3}{2})^3$	1.8984 $243/128$ $= \frac{1}{2^2}(\frac{3}{2})^5$	2.0000 2
振動数 [Hz]	260.74	293.33	330.00	347.65	391.11	440.00	495.00	521.48
純正調音階	1.0000 1	1.1250 $9/8$	1.2500 $5/4$ $= \frac{5}{4}$	1.3333 $4/3$	1.5000 $3/2$	1.6667 $5/3$ $= 2 \times \frac{2}{3} \frac{5}{4}$	1.8750 $15/8$ $= \frac{3}{2} \frac{5}{4}$	2.0000 2
振動数 [Hz]	264.00	297.00	330.00	352.00	396.00	440.00	495.00	528.00
平均率音階	1.0000	1.1225 $= 10^{\frac{2}{12}r}$	1.2599 $= 10^{\frac{4}{12}r}$	1.3348 $= 10^{\frac{5}{12}r}$	1.4983 $= 10^{\frac{7}{12}r}$	1.6818 $= 10^{\frac{9}{12}r}$	1.8877 $= 10^{\frac{11}{12}r}$	2.0000
振動数 [Hz]	261.63	293.66	329.63	349.23	392.00	440.00	493.88	523.25

表1 音階と振動数。A音 = 440.00 Hz を基準とした。 $r = \log_{10} 2 = 0.30103$ である。

5参考図書: 小方 厚 著「音律と音階の科学」講談社ブルーバックス B1567, 2007 年

応用実験編

音さの振動数決定

「マイクとオシロスコープ」追加課題

〔目的〕

マイクでとらえた音叉の音声信号と発信器による基準の信号をオシロスコープ上に表示し、リサージュ図形を観察しながら音叉の振動数を決定する。

注：理論・実験器具等は「マイクとオシロスコープ」と共通である。

〔実験手順〕

- 1-1 発信器, 圧電素子, およびオシロスコープの接続は「マイクとオシロスコープ」実験3と同じようにする。
- 1-2 音さをたたいて振動させ, その音を圧電素子で取り込み, オシロスコープで観察する。音さの付け根を机(広い板)に接触させると, 音さの音は十分な大きさに鳴る。圧電素子を音さの近くの机の上に置く。
- 1-3 発信器と音さについて, 表示される振幅が同程度になるよう, オシロスコープを調整する。また, それらの周期が同程度になるように発信器を設定する。音さに振動数が表記されていれば, その値を用いても良い。
- 1-4 オシロスコープを XY FORMAT にする。1:1 のリサージュ図形のどれかに近い形が表示されること, および, 音さをたたき直すと位相差の違う図形になることを確認する。発信器の振動数値を調整しながら, リサージュ図形の 1:1 の図がどれかの位相差で固定され, 動かなくなるような¹発信器の振動数値を探す。
- 1-5 さらに, 発信器の振動数を 1/2 倍, 2 倍, また, 1/3 倍, 3 倍の付近にして, リサージュ図形の 1:2 または 1:3 の図が動かないような発信器の振動数値を探す。
- 1-6 これらの 5 つの発信器振動数を用いて, 音さの振動数を推定せよ。

¹ 音叉の音声信号と発信器の電気信号の振動数が 0.1 Hz ずれていたなら 10 秒を周期とする変動が, 0.01 Hz ずれていたなら 100 秒を周期とする変動がみられる。

弦の共振

[目的]

弦楽器や管楽器の音には、音の高さを表す基本振動数成分のほかに、その整数倍の高い振動数成分が倍音として含まれ、それによって豊かな音色となる。弦や気柱などは自然に振動するときに、いくつかの振動数で同時に振動するのである。個々の成分に対応した振動を**固有振動**という。ひとつの成分だけを外力によって強制的に振動させることが可能である。外力の振動数が固有振動数と一致するとき、弦や気柱が大きな振幅で振動することを、**共振**という。

この実験では、交流電流を流した電磁石による周期的な磁力によって、スチール弦に横振動を起こす。磁力の振動数が変わるときの共振の生じ方や、共振時に現れる弦の固有振動の特徴を観察する。また、固有振動数は伝播速度と弦の長さにより決まり、さらに、伝播速度は張力と線密度で与えられるということについて、定量的に確かめる。

[理論(1) 固有振動]

両端を固定された長さ L の弦は、弾かれた後に図 1 のように振動する。これは固有振動のなかで最も単純な形であり、**基本振動**と呼ばれる。各部分の変位や速度の時間変化について次のことがいえる。

- 各部分には弦に垂直な方向に変位し、変位の大きさはすべての部分で同時に最大になる(図 1 の太い実線)。変位が最大の瞬間 ($t = t_{\text{elastic}}$)、弦全体が一瞬静止して見える。
- 各部分の速度も弦に垂直で、ある瞬間に大きさが最大になる。 t_{elastic} の次にそうなる瞬間を $t = t_{\text{kinetic}}$ とおく。速さが最大の瞬間、弦全体の形は振動のないときと同じである(図 1 の $y = 0$)。
- 振幅は弦の上の場所によって異なる。両端でゼロで、中央が最も大きい。振幅ゼロのところを**節**、振幅最大のところを**腹**という。

弦の固有振動には、この基本振動以外のものもある。次節に示す波動方程式と境界条件の議論の結果として、弦に沿って x 軸、変位方向を y 軸ととるとき、座標 x にある微小部分は、正の整数 n に特徴づけられた振幅

$$Y_n(x) = A \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda_n}\right) \quad \text{ただし、} \lambda_n = \frac{2L}{n} \text{ で、} n = 1, 2, 3, \dots \quad \dots (1)$$

で振動することが導かれる。このような弦の振動は、波長 λ_n の波が弦に沿って伝わり、固定された両端で¹反射して重なった結果として理解され、**定常波**と呼ばれる。基本振動の振幅(図 1 の太い実線)が式(1)での $n = 1$ にあたることを確認しよう。 $n \geq 2$ の場合を n 次の倍振動(あるいは n 次の高調波)という。

定常波の様子を考えると、それぞれの座標 x における変位は振幅 $Y_n(x)$ に $-1 \sim +1$ の範囲の係数をかけたものになる。 n 次の振動(基本振動あるいは倍振動)の振動数を f_n とするとき、時刻 t の原点を変

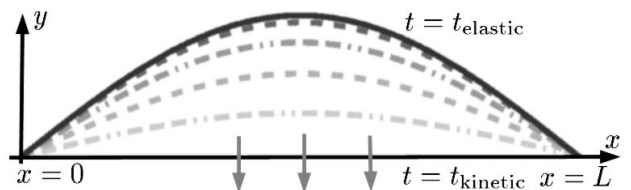


図 1 基本振動における変位の時間変化

¹ 弦が太い場合は特に、固定した端での波の反射が完全ではなく、一部が端の外側に通り抜けて、別のところで反射されることがある。このとき、注目している部分とは異なる長さ L' での固有振動が起こり得る。

位の大きさが最大になる瞬間(t_{elastic})にとれば、座標 x の微小部分の変位 $y_n(x, t)$ は調和振動

$$y_n(x, t) = Y_n(x) \cos(2\pi f_n t) \quad \dots(2)$$

となることも次節の議論から導かれる。ただし、 n 次の固有振動における振動数 f_n は、式(1)に示された波長 λ_n と、弦に沿って波が伝わる時の伝播速度 v を用いて

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2L} n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \dots(3)$$

で与えられる。このように、固有振動数が整数 n に比例してとびとびの値をとるという特徴は、伝播速度 v が一定であることと、弦の長さが半波長の整数倍になるという条件(境界条件)に由来する。

[理 論(2) 波動方程式と境界条件]

変位 $y(x, t)$ が満たすべき式は、弦を微小部分に分割した各部分が満たす運動方程式から導かれる

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = v^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \quad \dots(4)$$

という式である。これを**波動方程式**という。(偏微分記号 ∂ については、注1を、また、この場合の運動方程式については注2を参照)。係数に現れる v (単位:m/s) は **伝播速度** である。弦の**線密度**(単位長さあたり質量)を σ [kg/m] とすれば、弦にかかる張力 S [N] を用いて、伝播速度は

$$v = \sqrt{\frac{S}{\sigma}} \quad \dots(5)$$

で与えられる。前節の式(2)は波動方程式(4)の解の一つである(一般の解は注3を参照)。式(2)を式(4)に代入すると、座標 x だけを変数とする微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2} Y_n = -\left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2 Y_n \quad \dots(6)$$

が得られる。単振動の運動方程式の一般解と同様に、式(6)を満たす一般解は

$$Y_n(x) = A \sin\left(\frac{\omega_n}{v} x + \phi\right) \quad \dots(7)$$

である。ここで、定数 ω_n 、 ϕ は弦の境界(両端)が固定されていることから定まる。このような条件を**境界条件**という。ここでは $Y_n(0) = 0$ を満たすことにより $\phi = 0$ 、また、 $Y_n(L) = 0$ より $\frac{\omega_n}{v} L = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ が得られる。したがって、

$$\omega_n = \frac{v}{L} n\pi, \quad \text{あるいは} \quad f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{v}{2L} n, \quad \text{ただし, } n = 1, 2, 3, \dots$$

となり、これは式(3)と同一であり、式(7)は式(1)になる。なお、このような波動方程式が成り立つ現象では一般に、波の形状やエネルギーが伝播速度 v で移動する(**備考1: 振動のエネルギー分布**を参照せよ)。

注1 偏微分

記号 ∂ は一種の微分記号である。通常の微分記号 d と違うのは、複数の変数のうち、ある変数での微分を行う際に、他の変数すべてを一定にする条件のもとで行うという約束がある。例えば時間 t と位置 x によって変動する水の波の上でボートが水の表面に沿って傾くとき、水の波の高さ $y(x, t)$ の傾斜は、ある瞬間の傾きという意味で t を定数として固定し、 x で微分して求める。この微分操作を、記号 $\frac{dy}{dx}$ の代わりに $\frac{\partial y}{\partial x}$ 、あるいは一定にする t も明記する場合には添え字により $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_t$ と表記して、 x による y の**偏微分**と呼ぶ。 ∂ は偏微分記号といい、ラウンド・ディーあるいはパーシャル・ディー、あるいは単にラウンドあるいはパーシャルと読む。一方、記号 $\frac{\partial}{\partial t}$ は x を一定として t で微分することを表す。例えばある位置に立てたポールに浮き輪が上下するような動きに対して、浮き輪の昇降速度は $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_x$ と表記される。

注2 運動方程式

座標 x にある幅 Δx の微小部分の質量は $\sigma \Delta x$ である。これが y 方向に加速度 $\frac{\partial^2}{\partial t^2} y$ で運動する。この部分は $y = 0$ の周りで振動運動しているので、この部分にかかる正味の力は $y = 0$ に戻ろうとする復元力のはずであるが、実際にはたらく力は、この部分に隣接する左右の部分が作用する張力だけである。そして、弦はしなやかに変形できるので、弦に伝わる力は常に弦に沿った方向であり、大きさはどこでも同じになる。したがって、左右の部分は注目する部分とは傾きが異なっている、すなわち、弦が湾曲していることが復元力の原因である。この力を式で表し、運動方程式を導くことにしよう。

張力に変位方向の成分が生じるのは弦が傾くことによる。位置 $(x, y = Y(x))$ にある微小部分を P とする。 x 座標が $x + \Delta x$ の位置にある微小部分(これを R とする)は y 座標が $y = Y + dY = Y + \frac{dY}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2 Y}{dx^2} (\Delta x)^2$ にある。R から P に働く力 (f_x^R, f_y^R) は、 x 成分と y 成分の大きさの比が $1 : \left[\frac{dY}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d^2 Y}{dx^2} \Delta x \right]$ になる。したがって、

$$(f_x^R, f_y^R) = \left(\frac{S}{\sqrt{1+[\]^2}}, \frac{S[\]}{\sqrt{1+[\]^2}} \right) \sim \left(S \Delta x, \left[\frac{dY}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d^2 Y}{dx^2} \Delta x \right] S \Delta x \right)$$

で表される。ただし、変位が小さいとし、 $\Delta x \gg dY$ を仮定して近似をした。 x 座標が $x - \Delta x$ の位置にある微小部分(これを L とする)から P にはたらく力は

$$(f_x^L, f_y^L) \sim \left(-S \Delta x, - \left[\frac{dY}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d^2 Y}{dx^2} (-\Delta x) \right] S \Delta x \right)$$

で表される。正味の力は x 成分が 0、 y 成分が $\frac{d^2 Y}{dx^2} S \Delta x$ となる。たとえば、P にかかる復元力が y 軸方向正の向きになるのは $\frac{d^2 Y}{dx^2} > 0$ 、すなわち下に凸の形状の部分である。

以上をまとめれば、微小部分 P の運動方程式は $\sigma \Delta x \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} S \Delta x$ と表される。これを変形した $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{S}{\sigma} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ が波動方程式とその係数(式(4)および式(5))を与える。

注3 波動方程式の一般解

波動方程式 $\frac{\partial^2}{\partial t^2} y = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} y$ の解には、(1) $t = 0$ のときに形状が任意の関数 $F(x)$ であるような波が、変形せずに伝播速度 v で x 軸上を負の方向へ進むという進行波、すなわち $y(x, t) = F(x + vt)$ と、(2) $t = 0$ のときに形状が任意の関数 $G(x)$ であるような波が、変形せずに伝播速度 v で x 軸上を正の方向へ進むという進行波、すなわち $y(x, t) = G(x - vt)$ とがあり、(3) これら二つの進行波が重ね合わされた状態を表す $y(x, t) = F(x + vt) + G(x - vt)$ が一般解である。同じ振幅で互いに逆に進むふたつの進行波が重なるときに定常波ができるのは、(3) で $F(x) = G(x)$ の場合の例である。

[装置]

- (1) 弦の共振 PDL キット:BOX [コイル, 圧電素子付き駒, 駒, 滑車, おもり吊り下げ用リング, ネジ 2 個 (ナットは外さない), 発信器(品名:Fird W.Gen), 発信器附属品 (表示器, 電源延長コード), スチール弦], 高さ調整用磁石, ネジ穴つき鉄板, おもり 3 個, 直流電源 (5V 出力 AC/DC アダプタ)
- (2) PDL 共用: デジタルマルチメーター(品名:SANWA PC510, 以下 DMM), バナナ—ミノムシクリップ付きリード(赤黒), デジタルオシロスコープ(品名:OWON HDS1022M, 以下 HDS²), HDS 附属品(プローブ 2

本, 専用 AC/DC アダプタ), バインディングポスト, 30cm 定規, 紙コップ, 電子天秤

[実験方法]

1. おもりを1つにして, 図2のように装置を組み立てる。
 - 滑車では, 弦が可動部以外に触れないよう注意する。
 - ネジ先端が鉄板の裏に出ないように注意する(ナットは外さない)。
2. 必要であれば『オシロスコープ』の実験テキストを参照し, 発信器のコードの接続を行う。
3. コイルを弦の近くに置き, 発信器の振動数を変えながら基本振動で共振する振動数を探す。
 - 磁力が不足する場合は, 余った磁石や鉛筆のスチールさやなどをコイルの磁極に近づけ, 触れないように弦をはさむ。磁力が強すぎると弦が曲がり, 張力が増大するので注意する。
 - 発信器の振動数は 0.1 Hz の位まで調整し, 振幅が最も大きくなる値を探す。
 - おもりの数や弦の長さ L などの条件を変更して, 共振する振動数を探す。おもりの質量を測定し, おもり全体の質量を M として, 横軸に M/L^2 , 縦軸に共振振動数の2乗 f^2 をとったグラフを作成する。
4. 2次や3次の倍振動を起こす振動数を, 圧電素子の出力波形をHDSで観察しながら探す。
 - CH1(上)は赤, CH2(下)は青のプローブを装着し, CH1 はバインディングポストから発信機モニター信号, CH2は圧電素子の出力を接続する。
 - おもりが3個の場合の基本振動, 2次, 3次の倍振動で共振させ, オシロスコープ画面および弦の振動を観察し, 特徴を記録して, 定性的な違いをまとめる。
5. 以上の結果から, 弦の単位長さ当たり質量 σ を決定する。

参考: 弦の線密度(単位長さ当たり質量) σ の計算例と, 実測による参考値

$$\sigma = \frac{S}{v^2} = \frac{mg}{4L^2} \cdot \frac{n^2}{f_n^2} = \frac{0.190\text{kg} \times 9.80\text{m/s}^2 \times 1^2}{4 \times (0.225\text{m})^2 \times (200\text{Hz})^2} = 0.230\text{g/m} \quad (\text{共振実験から}),$$

$$= \frac{0.098\text{g}}{40.0\text{cm}} = 0.245\text{g/m}。 \quad (\text{長さと質量の実測から})$$

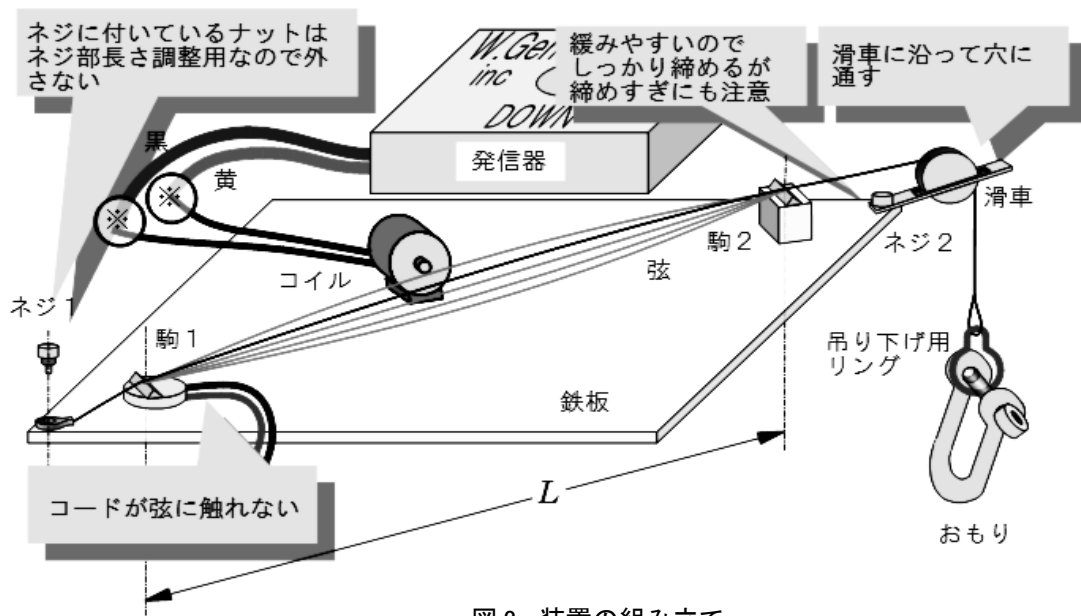


図2 装置の組み立て

備考1: 振動のエネルギー分布

弦の定常波の振動を観察しても、その場で各部分が y 方向に単振動するだけのようにも見え、弦に沿って何かが伝播しているようには見えない。しかし、エネルギーは弦に沿って移動していることを示そう。

変位 $y(x, t)$ に対して、長さ dx の微小部分は質量 σdx 、速度 $\frac{\partial y}{\partial t}$ で運動しながら、張力 S によって伸ばされている。この伸びは $\Delta = \sqrt{dx^2 + dy^2} - dx$ と書ける。この微小部分に蓄えられた弾性エネルギーは伸びが0のときを基準として、 $0 \rightarrow \Delta$ と変化する間に受ける仕事を使って $S\Delta$ と書ける。変位が小さいこと ($dx \ll |dy|$) を仮定すれば、この伸びは

$$\Delta = dx \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} - 1 \right\} \cong dx \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

となるので、 $x \sim x+dx$ の微小領域における運動エネルギーと弾性エネルギーは、単位長さあたりでの量 (長さ当たりのエネルギー密度) をそれぞれ K, E と書けば、

$$K dx = \frac{\sigma dx}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2, \quad E dx = \frac{S dx}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \quad \dots (8)$$

が成り立つ。式(8)に式(1)と式(2)を代入すれば

$$K = K_0 \sin^2 \left(2\pi \frac{x}{\lambda_n}\right) \sin^2 (2\pi f_n t), \quad E = E_0 \cos^2 \left(2\pi \frac{x}{\lambda_n}\right) \cos^2 (2\pi f_n t), \quad \dots (9)$$

が得られる。ただし、係数は

$$K_0 = \frac{\sigma}{2} (2\pi f_n A)^2, \quad E_0 = \frac{S}{2} (2\pi A/\lambda_n)^2 \quad \dots (10)$$

で定義される。これらの係数のあいだには、式(3)と式(5)より $K_0 = E_0$ が成り立つ。式(9)を図3に、また、全エネルギー密度 $K + E$ の分布を図4に示す。これらには次のような特徴がある。

- $t = t_{\text{elastic}}$ のときは、どの部分でも E は最大、 K はゼロになる。節の近くでは弦の傾き $\partial y/\partial x$ が大きく、伸びも大きい。逆に、腹の近くでは小さい。
- $t = t_{\text{kinetic}}$ のときは、どの部分でも E はゼロで、 K は最大になる。速度 $\partial y/\partial t$ は振幅 $Y(x)$ に比例し、腹の近くでは大きく、節の近くでは小さい。
- $K + E$ は $\pm x$ の二つの方向に向かって広がったり集まったりする。

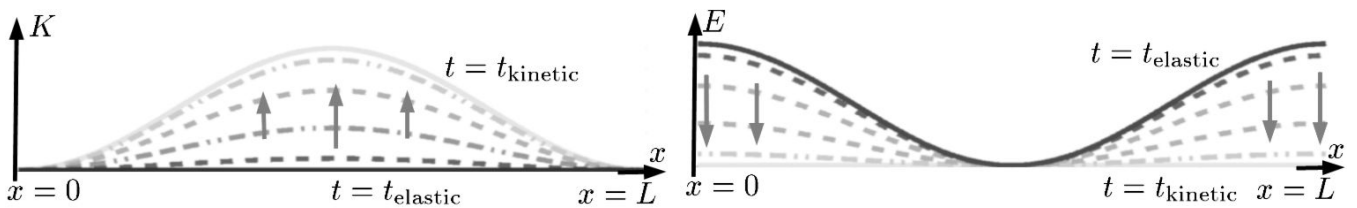


図3 運動エネルギー密度と弾性エネルギー密度の分布とその時間変化

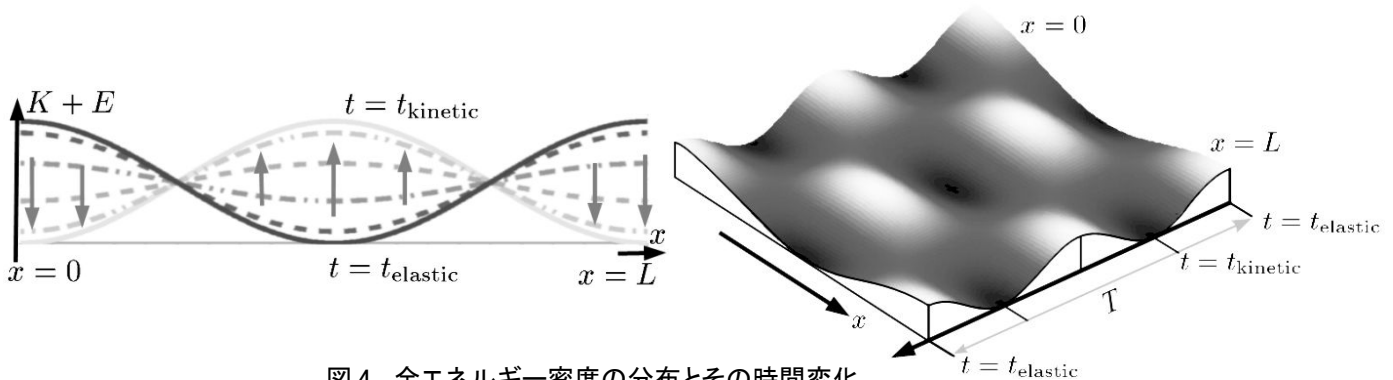


図4 全エネルギー密度の分布とその時間変化

備考 2: 共振曲線

磁力のかかる下で生じる振動の変位分布も、固有振動の式(1),(2)で表されるものとする。磁力のかからない固有振動の場合は、質量 $\sigma \Delta x$ の微小部分 Δx には復元力 $\frac{d^2 Y}{dx^2} S \Delta x$ だけが作用している。ここで、 $S = v^2 \sigma$ や $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\omega_n^2 / v^2 y$ により、復元力は $-\sigma \Delta x \omega_n^2 y$ と表すことができた。

これに外部から振動する磁力が加わったとき、弦の上で磁力の大きさは実際には一様ではないが、ここでは簡単のために一様であるとしよう。質量 $\sigma \Delta x$ の部分には振動数 Ω の一様な磁力 $\sigma \Delta x \cdot B \cos \Omega t$ がかかるとする。共振現象では外力によるエネルギー注入の分、エネルギー損失があつて初めて定常的な状態が保たれるため、弦の運動に抵抗力がかかることを仮定する必要がある。ここでは、質量 $\sigma \Delta x$ の部分に、速度 $\frac{\partial y}{\partial x}$ に比例する大きさ $\sigma \Delta x \cdot \gamma \frac{\partial y}{\partial x}$ の抵抗力が働くと仮定する。したがって運動方程式は

$$\sigma \Delta x \frac{d^2 y}{dx^2} = -\sigma \Delta x \omega_n^2 y + \sigma \Delta x B \cos(\Omega t) - \sigma \Delta x \gamma \frac{dy}{dx}$$

あるいは

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \gamma \frac{dy}{dx} + \omega_n^2 y = B \cos(\Omega t)$$

と書き換えられる³。このときの解を $y = y_0 \cos(\Omega t + \phi)$ とすれば、これを代入して

$$(\omega_n^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t + \phi) - \gamma \Omega \sin(\Omega t + \phi) = \frac{B}{y_0} \cos \Omega t,$$

従つて $\tan \phi = \frac{\gamma}{\Omega^2 - \omega_n^2}$ のもとで、

$$y_0(\Omega) = \frac{B}{\omega_n} \frac{Q/\Omega}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\Omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\Omega}\right)^2}} = \frac{B}{\omega_n^2} \frac{Q/x}{\sqrt{1+Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

という Ω 依存性のある振幅(共振曲線)が得られる。ただし、 $Q = \omega_n / \gamma$, $x = \Omega / \omega_n$ である。

[設問]

- 手順 3. の M/L^2 対 f^2 のグラフは何を示すものか。グラフの傾向に関する予想および実験結果の予想との違いについて説明しなさい。
- いくつかの n 次の倍振動について、図 1, 図 3 と対応する図を示しなさい。
- ある瞬間の弦の変位を $Y(x)$ とし、弦にはそれに沿って、大きさが一様な S の張力が働くとする。 x 軸に沿った微小な長さ Δx の部分に注目するとき、この部分の形状が上に凸であれば両側から働く張力の和は下向きに、また下に凸であれば上向きになることを図を使って説明しなさい。
- 三角関数の公式 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$ を用いることにより、弦の定常波解式(1)と式(2)を組み合わせた)波動関数の一般解 $y(x, t) = F(p) + G(q)$ (ただし、 $p = x + vt$, $q = x - vt$) のひとつであることを示しなさい。また、この一般解を式(8)に代入すると、全エネルギー密度 $K + E$ が $\left(\frac{dF}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dG}{dq}\right)^2$ に比例し、 $\frac{dF}{dp} \frac{dG}{dq}$ の項は消えることを示しなさい⁴。

3 LC 直列共振での電流の微分方程式に類似しているが、その際の電源電圧、すなわち強制力(右辺)は $\Omega B' \cos(\Omega t)$ の形であつたので、共振曲線は(特に低周波数領域では)形が異なる。

4 これは、ふたつの進行波 $F(p)$, $G(q)$ の振幅の重ね合わせ $y(x, t) = F(p) + G(q)$ でエネルギーが混じらないことを意味する。なお、 x 軸に沿って負の方向へ進む進行波 $y(x, t) = F(x + vt)$ あるいは正の方向へ進む進行波 $y(x, t) = G(x - vt)$ については、これらを式(8)に代入して得られるふたつのエネルギー K , E は同一の関数になる。

交流回路・共振回路

[目的]

コイルやコンデンサーに電流が流れるときの、電流と電圧降下の位相関係を確認する。

コイルとコンデンサー、および抵抗を含む回路における強制的な電流振動が共振を起こす現象を理解する。

[理論(1) コイルとその自己インダクタンス]

コイルは円筒形の空間の周りに一本の細長い導線を一方向に多数回巻きつけたもので、その導線に電流 i [A] を流すと円筒の軸方向に磁場が発生し、コイルの付近(磁場のある空間)に磁気エネルギーが蓄えられる。この磁気エネルギー(単位:ジュール [J]) は全体で $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2$ で与えられる。ただし、係数 L はコイルの自己インダクタンスで、単位はヘンリー [H] = [J/A²] である。なお、[J] = [W·s] = [V·A·s] を考えれば、[H] = [s·V/A] = [s·Ω] である。

一般に、電流 i が流れる素子の電圧降下が V のとき、 $V \cdot i$ で与えられる「電力」は、この素子が電気エネルギーを熱など他のエネルギーに1秒間に変換する大きさ(仕事率)である。一方、コイルに蓄えられた磁気エネルギー \mathcal{E}_L を時間で微分した $\frac{d\mathcal{E}_L}{dt} = L \frac{di}{dt} \cdot i$ は、コイルが電気エネルギーを磁気エネルギーに変換する1秒当たりの量である。したがって、コイルを流れる電流 i に伴う電圧降下は $V_L = L \frac{di}{dt}$ で与えられる。つまり、コイルを流れる電流が

$$i(t) = i_0 \sin(\omega t) \quad \dots (1)$$

の正弦波的变化をするとき、コイルの電圧降下は

$$V_L(t) = Li_0 \frac{d}{dt} \sin(\omega t) = \omega Li_0 \cos(\omega t)$$

つまり

$$V_L(t) = \omega Li_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \dots (2)$$

と書ける。よって、コイルの電圧降下は電流より $\pi/2 = 360^\circ \times 1/4$ だけ位相が進む。 $(\omega t + \frac{\pi}{2} = 0$ を満たす $t = -\frac{\pi}{2\omega} < 0$ のときの電圧と、 $t = 0$ のときの電流は同じ位相であり、電圧のほうが過去となる。)

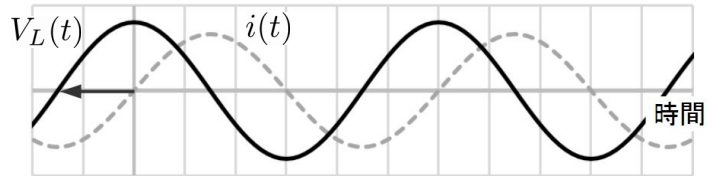


図1 位相が進んだ振動のグラフは過去へずれる

[理論(2) コンデンサーとその電気容量]

コンデンサーは平板状の空間の上下に、平行なふたつの平面導体を向かい合わせたもので、これらふたつの導体板に電圧 V [V] をかけるとその間に静電場を発生し、静電エネルギーが蓄えられる。このとき電場のある空間に蓄えられる静電エネルギー(単位:ジュール [J]) は全体で $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}CV^2$ で与えられる。ただし、係数 C はコンデンサーの静電容量あるいは電気容量(キャパシタンス)で、単位はファラッド [F] = [J/V²] である。なお、[J] = [W·s] = [V·A·s] を考えれば、[F] = [s·A/V] = [s/Ω] である。

この静電エネルギーを時間で微分すると $\frac{d\mathcal{E}_C}{dt} = V \cdot C \frac{dV}{dt}$ となるが、これは導体内部の電気エネルギーをコンデンサー付近で導体外部の静電エネルギーに変換する仕事率である。この式は、コンデンサーを流れる電流 i とそれに伴う電圧降下 V の関係が $i = C \frac{dV}{dt}$ で与えられることを意味する。つまり、電流 i が

$$i(t) = i_0 \sin(\omega t)$$

にしたがう正弦波的变化をするとき、電圧降下は $\frac{d}{dt} V_C(t) = \frac{i_0}{C} \sin(\omega t)$ を満たす。すなわち

$$V_C(t) = \frac{i_0}{C} \int \sin(\omega t) dt = -\frac{i_0}{\omega C} \cos(\omega t)$$

つまり、

$$V_C(t) = \frac{i_0}{\omega C} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \dots (3)$$

である。コンデンサーの電圧降下は電流より $\pi/2 = 360^\circ \times 1/4$ だけ位相が遅れる。($t = +\frac{\pi}{2\omega} > 0$ のときの電圧と、 $t = 0$ のときの電流が同じ位相であり、電圧のほうが未来となる。)

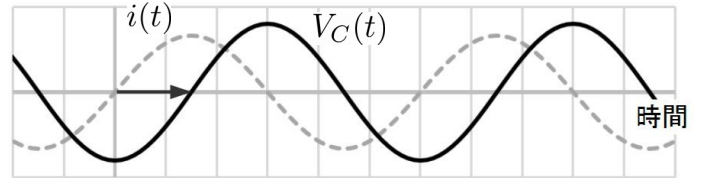


図2 位相が遅れた振動のグラフは未来へずれる

[理 論(3)強制振動と共振回路]

コイル L の自己インダクタンスを L [H] (= [s · Ω]), コンデンサー C の電気容量(キャパシタンス)を C [F] (= [s/Ω]), 抵抗 R の電気抵抗を R [Ω] とする。発振器の出力は周波数 f [Hz] の正弦波とする。これに対する角周波数は $\omega = 2\pi f$ である。発振器を使って回路の一部分に強制的な振動電圧を加えると、回路には同じ振動数の電流が流れる。発信器の出力が $V(t) = V_0 \sin(\omega t + \phi)$ で変化するとき、 $i(t) = i_0 \sin(\omega t)$ で表される電流が流れるものとして、 i_0 と ϕ がどのようにして決まるか、特に ω にどう依存するかを考えよう。

LC 直列共振

図3のようにコイルとコンデンサーを直列に接続した回路 (LC 直列回路) の場合、各素子における電圧降下を回路に流れる電流 $i(t)$ で表せば、キルヒホッフ第1法則は $L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = V$ となる。この両辺を時間で微分すれば、電流を表す関数 $i(t)$ は次の微分方程式を満たす必要があることになる。

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \omega V_0 \cos(\omega t + \phi(\omega)) \dots (4)$$

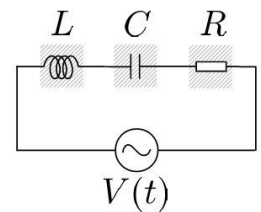


図3 LC 直列回路

となる。この解が $i(t) = i_0(\omega) \sin(\omega t)$ と書けるなら、上式左辺にはこれを代入し、右辺は加法定理により $-\omega^2 L i_0(\omega) \sin(\omega t) + \omega R i_0(\omega) \cos(\omega t) + \frac{i_0(\omega)}{C} \sin(\omega t) = \omega V_0 \cos \phi(\omega) \cos(\omega t) - \omega V_0 \sin \phi(\omega) \sin(\omega t)$ が成り立ち、一次独立なふたつの関数 $\sin(\omega t)$ と $\cos(\omega t)$ に対し、それぞれの係数を個別に比較して

$$\begin{aligned} (-\omega^2 L + \frac{1}{C}) i_0(\omega) &= -\omega V_0 \sin \phi(\omega), \text{ つまり } \sin \phi(\omega) = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \frac{i_0(\omega)}{V_0} \\ \omega R i_0(\omega) &= \omega V_0 \cos \phi(\omega), \text{ つまり } \cos \phi(\omega) = R \frac{i_0(\omega)}{V_0} \end{aligned}$$

の2式が得られる。辺々で割り算をすれば

$$\tan \phi(\omega) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \left[= Q \left(x - \frac{1}{x} \right) \right], \dots (5)$$

また、 $(\sin \phi(\omega))^2 + (\cos \phi(\omega))^2 = 1$ に代入して整理すれば

$$i_0(\omega) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \left[= \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan \phi(\omega))^2}} = \frac{V_0}{R} \cos \phi(\omega) \right] \dots (6)$$

を得る。ここで、

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \text{および } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

を定義し、簡素に表現しなおしたものを [] 内に列記した。式(5)より $\phi(\omega)$ 等の関数の理論曲線は、 x を対数目盛にとると 図4 のようになる。電流振幅 $i_0(\omega)$ に比例する $\cos \phi(\omega)$ のグラフは $\omega = \omega_0$ (あるいは $x = 1$) において最大となる。それを与える周波数

$$f_{\text{res}} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \dots (7)$$

を共振周波数 (あるいは共振点) という。LC 直列回路の周波数依存性には次の特徴がある。

共振点から十分に離れた周波数では $i(t) = 0$ が成り立つ。

共振点において、時間 t によらずに $i(t) = V(t)/R$ が成り立つ。

特に後者は、共振点において LC 直列部分のリアクタンスがゼロになることを表している。共振点では L と C のあいだで自発的な振動電流が発生し、外部から強制する力 (電圧) を必要としないためである。

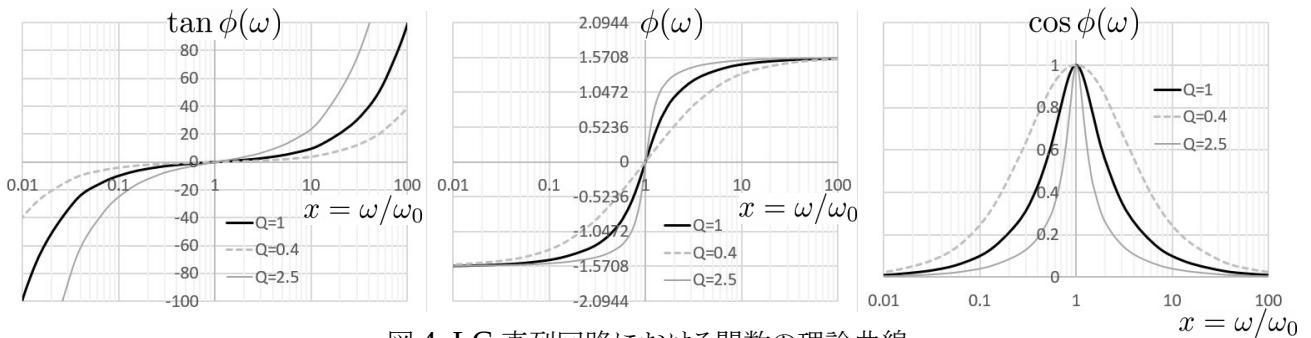


図4 LC 直列回路における関数の理論曲線

LC 並列共振

図5のようにコイルとコンデンサーを並列に接続した回路 (LC 並列回路) の場合、電源から流れる電流 i が、コイルに流れる電流 i_L とコンデンサーに流れる電流 i_C に分岐するところではキルヒホッフの第二法則として、

$$i = i_L + i_C \quad \dots (8)$$

が成り立つ。コイルおよびコンデンサーにおける電圧降下はそれぞれ、

$$V_L = L \frac{di_L}{dt}, \quad V_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$$

と表すことができ、この回路ではこれらは並列に配置されているため等しい。さらにまた、電源電圧から抵抗での電圧降下を差し引いた $V - iR$ とも等しい。したがって、

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} V_L = \frac{1}{L} (V - iR), \quad \dots (9)$$

および $\int i_C dt = CV_C = C(V - iR)$ が成り立つ。後者は時間で2回微分して、

$$\frac{di_C}{dt} = C \frac{d^2 V_C}{dt^2} = C \left(\frac{d^2 V}{dt^2} - \frac{d^2 i}{dt^2} R \right) \quad \dots (10)$$

と書ける。これらを式(7)を時間で1回微分した式

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_L}{dt} + \frac{di_C}{dt}$$

に代入し、電源電圧は $V(t) = V_0 \sin(\omega t + \phi)$ で変化するものとする、この場合の電流 $i(t)$ が満たすべき微分方程式が

$$CR \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \left(\frac{1}{L} - \omega^2 C \right) V_0 \sin(\omega t + \phi)$$

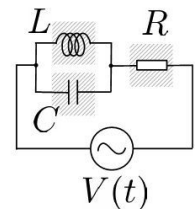


図5 LC 並列回路

となる。その解が $i(t) = i_0(\omega) \sin(\omega t)$ と書けるならば、上式左辺に代入し、右辺は加法定理により $(-\omega^2 C + \frac{1}{L}) Ri_0(\omega) \sin(\omega t) + \omega i_0(\omega) \cos(\omega t) = (\frac{1}{L} - \omega^2 C) V_0 \{ \sin(\omega t) \cos \phi + \cos(\omega t) \sin \phi \}$ となることから

$$\begin{aligned} \sin \phi(\omega) &= \frac{1}{\frac{1}{\omega L} - \omega C} \frac{i_0(\omega)}{V_0}, \\ \cos \phi(\omega) &= R \frac{i_0(\omega)}{V_0} \end{aligned}$$

が得られ、

$$\tan \phi(\omega) = \frac{1}{R} \frac{1}{\frac{1}{\omega L} - \omega C} \left[= \frac{Q}{\frac{1}{x} - x} \right] \quad \dots (11)$$

$$i_0(\omega) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}} \left[= \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan \phi(\omega))^2}} = \frac{V_0}{R} \cos \phi(\omega) \right] \quad \dots (12)$$

となる。ここで、LC 直列回路の場合と同じ

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \text{および} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

を用いて簡素に表現しなおしたものを [] 内に列記した。式(8)より $\phi(\omega)$ 等の関数の理論曲線は、 x を対数目盛にとると 図 5 のようになる。電流振幅 $i_0(\omega)$ に比例する $\cos \phi(\omega)$ のグラフは $\omega = \omega_0$ (あるいは $x = 1$) において最小のゼロとなる。それを与える周波数は式(7)に一致し、この場合もこれを **共振周波数** (あるいは **共振点**) と呼ぶ。LC 並列回路には次のような周波数依存性があることがわかる。

共振点から十分に離れた周波数では時間 t によらずに $i(t) = V(t)/R$ が成り立つ。

共振点において、 $i(t) = 0$ となる。

特に後者は、共振点では LC 並列部分のリアクタンスが無限大になることを表している。共振点では L と C のあいだで自発的な振動電流が発生し、外部から強制する力(電圧)をかけても自発的な振動電流に影響を与えることはなく、電流が漏れ出ることができないためである。

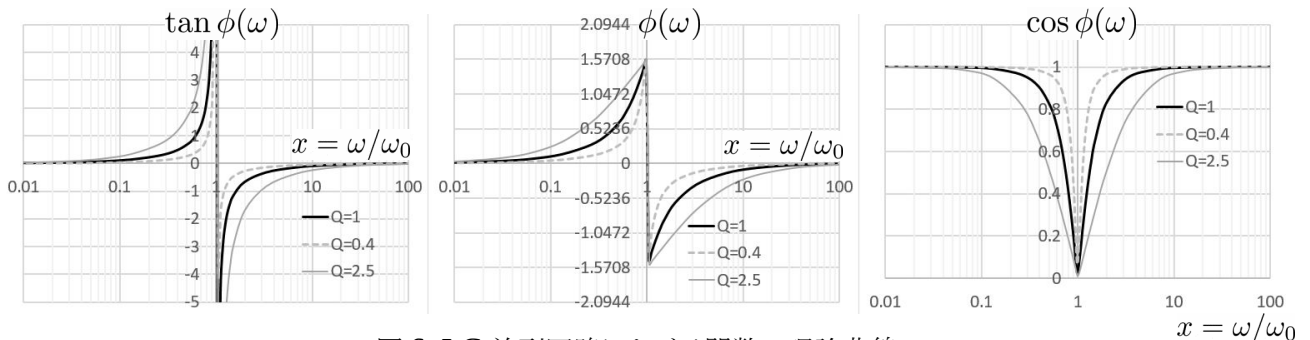


図 6 LC 並列回路における関数の理論曲線

〔装置〕

LCR回路部品(コイル, コンデンサー, および抵抗器を接続済み), 発信器(品名: Fird W.Gen), 発信器附属品(表示器, 電源延長コード, 専用 AC/DC アダプタ), デジタルマルチメーター(品名: SANWA PC510, 以下 DMM), デジタルオシロスコープ(品名: OWON HDS1022M, 以下 HDS(ハンドヘルド・デジタル・ストレージ)), HDS 附属品(プローブ 2 本, 専用 AC/DC アダプタ), リード線。

〔実験手順〕

実験1 コイルとコンデンサーでの電圧の位相が電流の位相に対して進むか遅れるか, またその差はどれだけあるかをオシロスコープにより確認する。

1-1. 図 7(左) の LR 回路は, LCR 回路部品において C を迂回するリード線を接続したものである。これにコイルの両端に CH1 プローブの先端とグラウンドリード・クリップを接続し, 抵抗の両端には CH2 のそれらを接続する。ただし, オシロスコープの内部には外部の電磁波の影響を遮断するための導体箱が内部の回路を包んでいて, これは各プローブのグラウンドに接続されている。したがって, CH1 と CH2 のグラウンドリードのクリップは同電位の位置に, 図 7(左) のように接続すること。これにより CH2 の測定量は正負が反転するが, オシロスコープにはこれを戻して表示する機能(Inversion)がある。

同様に, CR 回路については図 7(右) のようにコイルを迂回したリード線を接続する。コンデンサーの両端に CH1 のプローブの先端とグラウンドリードのクリップを接続し, 抵抗の両端には CH2 のそれらを接続する。

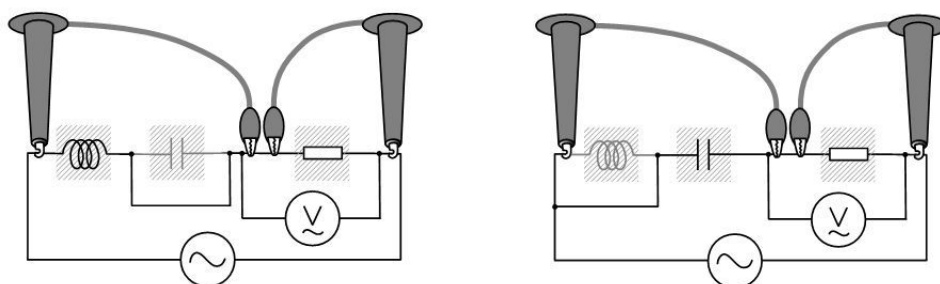


図 7 LR 回路 (左) および CR 回路 (右) の測定ための配線

それぞれの測定では, 交流電源記号の位置に発信器の正弦波出力(青-黒)を接続し, 発信器は $f = 16 \text{ kHz}$ に設定する。図 7 に対応する実際の装置の接続(実態図)をスケッチで記録せよ(写真可)。オシロスコープを以下のように設定して両チャンネルの波形をスケッチで記録せよ(写真可)。抵抗(CH2)の電圧の位相はコイルやコンデンサーに流れる電流の位相と一致することを使い, これらの電圧の位相が電流に対して $\pi/2$ 進んでいるか遅れているかを示せ。

時間軸	10 $\mu\text{s}/\text{div}$		
CH 1 電圧軸	200 mV/div	Zero を縦軸の中央にとる	Inversion OFF (デフォルト)
CH 2 電圧軸	200 mV/div	Zero を縦軸の中央にとる	Inversion ON (注)

(注: MENU \rightarrow CH1 Setup \rightarrow F4 = Inversion ON/OFF)

1-2. 抵抗の値 R を DMM によって測定し, 1-1. で測定された CH1 の振幅(LR 回路では $\omega L i_0$, CR 回路では $i_0/\omega C$) と CH2 (いずれも $R i_0$) の振幅の比から L と C の値を求めなさい。

実験2 LC 直列回路とLC 並列回路について、電流振幅の周波数依存性を表すグラフ(共振曲線)を求め、その特徴を確認するとともに、共振周波数をグラフから決定する。

2-1. LCR回路部品に接続されたコイルのインダクタンス L とコンデンサーの電気容量 C に実験1で得られた値を用い、式(7)を用いて共振周波数の予想を求める。以下で述べる発信器出力信号の振動数は共振周波数が $f = 16$ kHz 程度の場合であり、2 kHz 以上ずれている場合は調整が必要である。

2-2. 図8(左)のLC直列回路のように、発信器の正弦波出力(青-黒)を接続し、実際の装置の接続(実態図)をスケッチで記録せよ(写真可)。

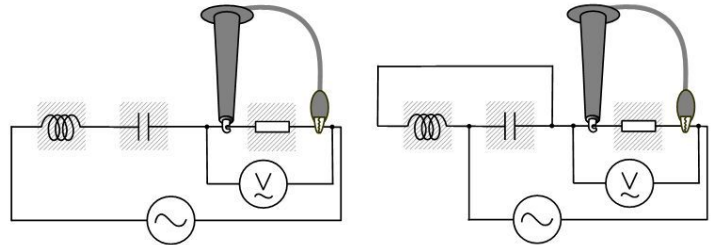


図8 LC直列回路(左)およびLC並列回路(右)

発信器の信号の周波数を下記の表に示す値に設定する。それぞれの周波数について、抵抗端子間の電圧をオシロスコープでとらえ、振幅を相対値で読む。オシロスコープ画面上の区画(div)単位で読み取ればよい。電圧の山と谷の幅(ピークからピークまでの電圧で V_{p-p} と書く)でもよく、これは振幅の2倍である。あるいは、50 kHz 以下であればDMで交流電圧測定を行うこともできるが、交流電圧の測定値は実効値であり、振幅の $1/\sqrt{2}$ 倍である。同様の測定を図8(右)のLC並進回路についても行う。

測定する周波数範囲と間隔は理論曲線(図4・図6の $\cos \phi(\omega)$)の形状の特性を十分にあらわすように選ぶものとする。共振周波数が16 kHz 程度の場合の目安を以下に示す。

50	100	200	500	1k	2k	4k	6k	8k	9k
10k	11k	12k	13k	14k	15k	16k	17k	18k	19k
20k	23k	30k	50k	100k	200k	500k	1M		

片対数グラフを用い、周波数を対数目盛にとって測定結果をプロットする。共振周波数は直列回路では電流の振幅が最大を与える周波数、並列回路では電流の振幅が最小を与える周波数であるが、全体の測定結果を反映させるため、得られた片対数グラフを縦に半分に折り重ね、左右対称の折り目から読み取る。

〔設問〕

1. コイルとコンデンサーにおける電圧降下と電流の時間変化のグラフを描き、電流 $i(t)$ がゼロ→正の最大→ゼロ→負の最大→ゼロとなる1周期のあいだにそれらの電圧降下 $V_L(t)$, $V_C(t)$ がどう変化するかを説明しなさい。これらの関数形が正弦波であることを使い、位相差についても言及すること。

2. 実験で用いた周波数 f に対して、LC直列回路とLC並列回路のそれぞれでの $\phi(f)$ の値を計算してグラフにせよ。

3. LとCのみからなる部分では、電流 $i(t) = i_0 \sin(\omega t)$ が流れるときに位相差 $\pi/2$ の電圧降下が生じる。この電圧降下は一般に $V_X(t) = X i_0 \cos(\omega t)$ で表され、係数 X はリアクタンスと呼ばれる。以下の素子や回路部分でのリアクタンスが次のように与えられることを説明しなさい。

- (1) 自己インダクタンス L のコイル: $X_L = \omega L$, (2) 電気容量 C のコンデンサー: $X_C = -\frac{1}{\omega C}$,
 (3) LC直列部分: $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$, (4) LC並列部分: $X = \frac{1}{\frac{1}{\omega L} - \omega C}$

LED の電流・電圧特性とエネルギー変換

〔目的〕

電気エネルギーを効率よく光に変換する発光器具として、LED (Light Emitting Diode, 発光ダイオード) は身近なものである。LED は半導体を利用した素子であり、発光させるための電気回路の上ではダイオードとしての特性をもつ。また、自然界から充足されほとんど枯渇する恐れのないエネルギー源 (再生可能エネルギー) として注目されている太陽光は、太陽電池やフォトダイオードによって電流に変換されるが、これらの素子もダイオードとしての特性を持つ。そして、一般のダイオードや LED も、特定の部位に光を受けると光起電力を生じ、それに接続した負荷抵抗へ電流を流し出すことができる。

そこで、いくつかの LED について、発光色 (波長, あるいは振動数) との関係に注目しながら、ダイオードとしての電流・電圧特性を調べる。さらに、LED に光を当てると光起電力が生じることや、流れ出す電流は負荷抵抗を変えてもほぼ一定であることを確かめる。そして、電気回路の内部の電気エネルギーと外部の光エネルギーのあいだでのエネルギー相互変換について考察する。

〔理論〕

1. ダイオード

ケイ素やゲルマニウムなどの半導体は、隣接する原子と原子を結合させている電子 (価電子) の一部が熱的エネルギーをもらって励起され、原子から開放されて自由に動き回る (これを伝導電子という)。また、励起された価電子の抜けた空席には、近隣の他の価電子が励起されて入ることがあり、見かけ上、空席が自由に動き回る (これを正孔という)。純粋なケイ素やゲルマニウムの電流は、伝導電子の流れ (電流とは逆向き) と正孔の流れ (電流と同じ向き) によって説明される。電流のもとになる伝導電子 (負の電荷を持つ) や正孔 (正の電荷を持つ) を、電荷の運び手という意味で担体 (キャリアー) という。

これらのキャリアーは、不純物原子を混在させた半導体では熱励起がなくても存在する。不純物として分布させることにより伝導電子を導入した半導体を N 型 (negative-type), 正孔を導入した半導体を P 型 (positive-type) という。そして、N 型と P 型を接合させる (継ぎ合わせる) ことにより構成された半導体素子は、電子回路において重要な特徴を持ち、さまざまな用途に応用されている。

一対の N 型と P 型を接合させた素子をダイオード (diode) という。ダイオードには回路に組み込むためのふたつの足がある。N 型側とつながる足をカソード (cathode, 陰極) といい、記号 K で表す。P 型側とつながる足をアノード (anode, 陽極) といい、記号 A で表す。回路図記号との対応は $A \rightarrow \text{---} \triangle \text{---} \leftarrow K$ であり、実際の素子との対応は $A \rightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \leftarrow K$ (K にマーク), あるいは LED は $A \rightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \leftarrow K$ (K の足が短い) となる。ダイオードに外部から電圧がかかるとき、電流が流れるのは A を高電位にした場合だけで、このとき電流は A から入って K から出る。この向き $A \rightarrow K$ を順方向という。逆に、K を高電位にしてもダイオードに電流はほとんど流れない。この向き ($K \rightarrow A$) を逆方向という。LED を光らせるには順方向電圧をかけるが、逆方向に電圧をかけて使うダイオード (一定の電圧までは電流が流れないが、それを超えると電流が流れて電圧がかからなくなる素子で、定電圧ダイオードと呼ばれるもの) もある。

順方向に電流が流れるとき、外部の回路からA(=正孔過多のP型領域側)には正電圧、K(=伝導電子過多のN型領域側)には負電圧が印加されている。このときP型領域で自由に動く正孔は、接合面の先のKから引かれ、接合面に向かって加速する。N型領域で自由に動く伝導電子は、接合面の先のAから引かれ、接合面に向かって加速する。つまり、これらのキャリアーは接合面で再結合したり、勢いよく接合面を通過したりする。外部の回路からAには正孔が供給され、Kには伝導電子が供給されるので、再結合によりキャリアーが不足することはない。また、再結合すると消滅し、伝導電子と正孔が持っていたエネルギーに余りが生じる。この余剰エネルギーは熱あるいは光となる。光として放出するのがLEDである。

外部の回路から逆方向の電圧がかけられたときには、Aには負電圧が、また、Kには正電圧が印加されている。このときN型領域で伝導電子は接合面の先のKから反発され、P型領域で正孔は接合面の先のAから反発される。したがってどちらの領域でも、自由に動くキャリアーは接合面から遠ざかり、接合面付近はキャリアーが不足して、それを補うことができないため電気伝導は出来なくなって、電流は流れない。

ダイオードに電圧 V (ただし、順方向なら $V > 0$ 、逆方向なら $V < 0$) をかけるとき、ダイオードに流れる電流 I には(1)キャリアの拡散と、(2)キャリア対の生成再結合、というふたつの仕組みがあり、物質や電圧範囲によってどちらが優位かが異なる。(1)では $n = 1$ 、(2)では $n = 2$ 、一般には $1 \leq n \leq 2$ として、

$$I(V) = I_0 \left[\exp \left(\frac{q_e V}{nk_B T} \right) - 1 \right]$$

という式に従うとされる。ただし、 T は絶対温度、 $k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ はボルツマン定数、 $q_e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ は電子の電気量(電気素量)であり、また、 I_0 は逆方向電圧をかけたときの漏れ電流である。ダイオード素子はこの漏れ電流は小さいほど良いとされ、この値は(物質によって異なるが)最大でも $10 \mu\text{A}$ を超えないなど製品として規格があるが、個々の素子の値は一般にはさらに小さい。順方向電流について、 $I \gg I_0$ となる範囲では $I(V) = I_0 \exp \left(\frac{q_e V}{nk_B T} \right)$ で近似でき、これは

$$\log_e I = \frac{q_e}{nk_B T} V + \log_e I_0 \quad \text{あるいは} \quad \log_{10} I = \left(\frac{q_e \log_{10} e}{nk_B T} \right) V + \log_{10} I_0$$

と変形できる。つまり、 V 対 $\log_{10} I$ グラフは直線になり、その傾きは温度が高いとき小さい。

2. 高抵抗回路の電圧測定時の電圧計の内部抵抗

1 V 程度の電圧をかけたときに回路を流れる電流が $1 \mu\text{A}$ 程度であれば、回路上の素子の抵抗は $1 \text{ M}\Omega$ 程度である。このような高抵抗回路では、電圧計の内部抵抗が無視できない。理想的な電圧計は内部抵抗が無限大であって、電圧計に流れ込む電流はゼロである。しかし、実際の電圧計はそのような理想電圧計(内部抵抗が無限大)と、並列に接続された抵抗(これを r_V とする)とによる等価回路で表すことができる。

一般にデジタル電圧計はアナログ電圧計よりも内部抵抗が大きいですが、それでも $r_V \sim 10 \text{ M}\Omega$ 程度である。電圧表示が 1 V のときには内部抵抗には電流が $1 \text{ V} / 10 \text{ M}\Omega = 0.1 \mu\text{A}$ 程度流れ込むことになり、外部の回路を流れる電流が $1 \mu\text{A}$ なら1割程度の電流が、外部の回路ではなく電圧計の中を流れ、抵抗の端子間電圧を測定する場合なら本来の電圧(電圧計をつながないとき)の9割程度の値になってしまう。したがって、このような場合は電圧計を上記のような等価回路に置き換えて、素子に流れる電流や素子の端子間の電

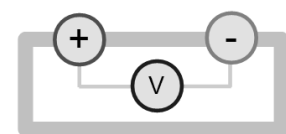


図1 理想的な電圧計
(内部抵抗無限大)

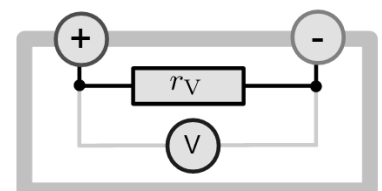


図2 実際の電圧計の等価回路
(理想電圧計と内部抵抗からなる)

圧を正しく補正する必要がある。

一般に、素子 R に流れる電流 i_R とその端子間電圧 V_R を求めたいとき、電流計(内部抵抗 r_A)と電圧計(内部抵抗 r_V)を使って次のふたつの回路(1)と(2)を組んだとすると、それらでの電流計の読み i_m と電圧計の読み V_m から本来の電流 i_R と電圧 V_R を得るには次のような補正が必要になる。

(1) 電流計を抵抗 R のすぐ隣に
直接接続する場合:

$$V_R = V_m - i_m r_A, \quad i_R = i_m$$

i_m が小さいときこの補正は不要である。

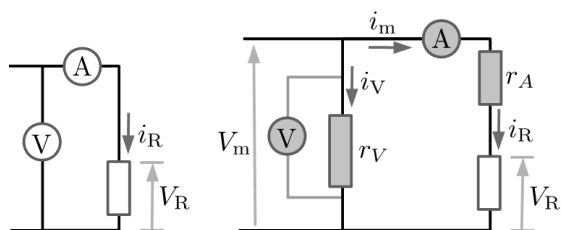


図3 電圧・電流測定(1)の回路図(左)と内部抵抗(右)

(2) 電圧計を抵抗 R のすぐ隣に
並列接続する場合:

$$V_R = V_m, \quad i_R = i_m - i_V = i_m - V_m/r_V$$

i_m が小さいときこの補正は必須である。

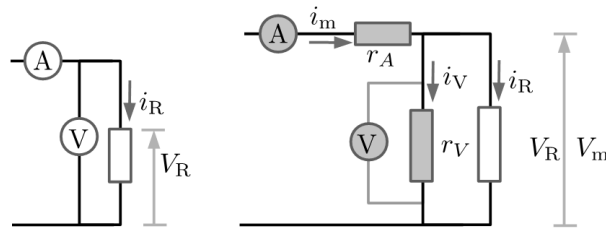


図4 電圧・電流測定(2)の回路図(左)と内部抵抗(右)

〔装置〕

回路基板(可変抵抗 100Ω , $10 \text{ k}\Omega$, $2 \text{ M}\Omega$ 装着済み), デジタルマルチメーター SANWA PC510 (以下, DMMと呼ぶ), アナログマルチテスター SANWA SP-15D (以下, テスターと呼ぶ), バインディング・ポスト, 5 V 直流電源(AC-DC アダプター)および専用リード線(保護抵抗 120Ω 装着済み), 抵抗(0.56 , 1.0 , 2.7 , 10 , $33 \text{ M}\Omega$), ストロー(内直径 $5 \text{ mm}\phi$), ビニルテープ, LED ($5 \text{ mm}\phi$ 砲弾型)。

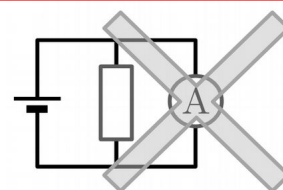
表1 LED 参照値など # : 順電流 20 mA 時 \$: 100 mA 時 ※ : 定格値 N.A. : 不明(=Not Available)

発光	製造元	型番	半導体物質	中心波長 (#, \$)	半値 半幅	広がり 角度	逆電 圧※	漏れ電流 最大値	順電流 ※
青	Kingbright	L-7113QBC-D	GaN	470 nm #	25 nm	$\pm 7.5^\circ$	5 V	< $10 \mu\text{A}$	30 mA
緑	Sharp	GL5KG44	GaP	555 nm #	25 nm	$\pm 10^\circ$	5 V	< $10 \mu\text{A}$	30 mA
黄緑	Sharp	GL5EG44	GaP	565 nm #	30 nm	$\pm 10^\circ$	5 V	< $10 \mu\text{A}$	30 mA
橙	Rohm	SLI-580DT3F	AlGaInP/GaAs	605 nm #	N.A.	$\pm 5^\circ$	9 V	< $100 \mu\text{A}$	50 mA
赤	Kingbright	L-1513SRC-C	GaAlAs	640 nm #	20 nm	$\pm 10^\circ$	5 V	< $10 \mu\text{A}$	30 mA
赤外	VISHAY	TSAL6100	GaAlAs/GaAs	940 nm \$	25 nm	$\pm 10^\circ$	5 V	< $10 \mu\text{A}$	100 mA

※定格値は「これ以上にしてはならない値」であり, 最大値で逆電圧 5 V , 順電流 30 mA を超えないことを確認しながら進めること。

注意 DMM やテスターによって電流測定をする場合, 測定範囲を超えないこと。このとき, 測定器の端子間に電圧がかかっても破損することがある。

電圧測定と電流測定を切り替える場合は電源を切断し, 電流測定時に並列に電源や抵抗が入ることのないように特に注意してから電源をつなぐこと。



〔実験方法〕

実験1 使用する抵抗の抵抗値測定

AC-DC アダプターに装着されている保護抵抗と、5 種類の高抵抗値抵抗、また基盤に装着されている可変抵抗など、使用するすべての抵抗のカラーコードや形状の特徴を記録し、カラーコードがあるものは表示値を読む。DMM による測定値を記録する。AC-DC アダプターに装着されている保護抵抗の中間端子はこの後使用しないので、ビニルテープで覆って、確実に外部との絶縁をする。

実験2 デジタルマルチメーターの内部抵抗測定(2人で共同実験)

直流 $E = 5\text{V}$ の電圧を、右図を参照しながら2台の DMM を直列接続し、同時に直流電圧測定する。一方の入力端子はバインディング・ポストを使い、抵抗 R ($0.56, 1.0, 2.7, 10, 33\text{M}\Omega$) から適当な抵抗を短絡接続する(あるいは抵抗を外して $R \rightarrow \infty$ とする)。抵抗 R のついている DMM の内部抵抗を r_1 、電圧の読みを V_1 、短絡抵抗のついていない DMM の内部抵抗を r_2 、電圧の読みを V_2 とする。2台の電圧の読み V_1, V_2 を記録する。これらは

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{r_2}{r_1} + r_2 \frac{1}{R}$$

にしたがうことが予想される。したがって、6 種類の R について、横軸に $1/R$ 、縦軸に V_2/V_1 をとったグラフを作成する。データが直線上に並べば近似直線の切片(r_2/r_1)と傾き(r_2)から、ふたつの DMM の内部抵抗 r_1, r_2 を決定する。実験の記録として、素子を実際の形状に合わせながら、その配置は実際よりも単純化した実態図を残し、報告すること。

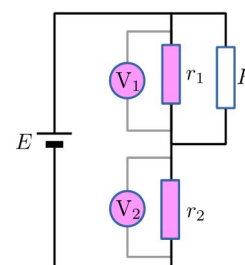


図 5

以下の実験 3~5 を、2 つ以上の種類の LED について行う。

実験3 LED の発光開始電圧

直流 $E = 5\text{V}$ の電圧を、回路基板上の可変抵抗 ($100\Omega, 10\text{k}\Omega$, あるいは $2\text{M}\Omega$) で電圧分割し、その一方を LED に順方向で印加する。電流計をはさんで電流の値を観察しながら印加電圧を徐々に上げ、目視あるいは CCD カメラ・センサー等で「わずかに発光し始める電圧」を探す。回路図および実態図を記録し、必要であれば電圧計の内部抵抗による読み取り値の補正をすること。

実験4 LED の発光領域での電流・電圧特性

実験 3 で得られた開始電圧付近からさらに印加電圧を上げていき、LED を流れる電流を縦軸、印加した順方向電圧を横軸にしたグラフを作成するためのデータを得る。そのために、まず、定格順電流の値を超えないように注意しながら、回路基板に装着されている可変抵抗を変化させ、定格未満での測定が可能な最大の電圧まで上げて、そのときの電圧・電流を記録する。そのまま放置すると LED の温度が上がるので、いったん電源を切るか電圧を下げておき、測定すべき電圧の値を決めてから、他の測定に入ること。なお、LED の温度が変化すると、次の実験 5 以降のような、微小電流領域での測定結果にずれが生じることが予想される。

実験5 LED の非発光領域での電流・電圧特性

実験 3 で得られた開始電圧付近から、今度は印加電圧を下げたときの測定を行う。印加電圧がゼロになったら LED のカソード・アノードの接続を逆転させて印加電圧(逆電圧)を増加させ、定格逆電圧を超えないように注意しながら電流・電圧特性を調べる。LED に当たっている外部の光を遮ると特性が変化するかどうかを確認し、変化する場合は遮光すること。

順方向の測定するとき、回路基板上の $2\text{ M}\Omega$ だけでは LED に流れ込む電流が十分小さくならない場合がある。その際は抵抗 ($0.56, 1.0, 2.7, 10, 33\text{ M}\Omega$) を LED に直列に挿入し、電流を絞ること。

以上の実験 3~5 から、各 LED の電流・電圧特性のグラフ (正規および片対数) を作成する。

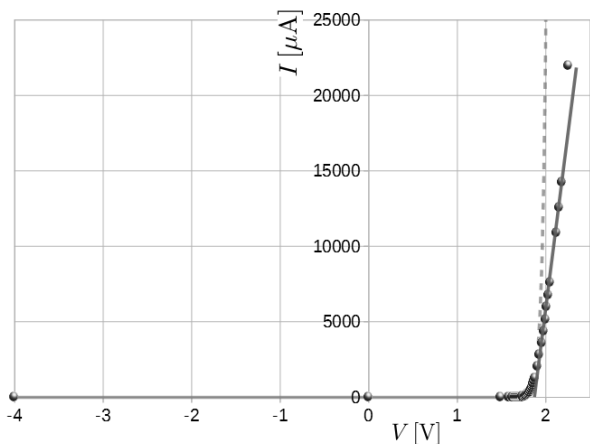


図 6 LED の電流・電圧特性 (発光領域・逆電圧印加を含む)

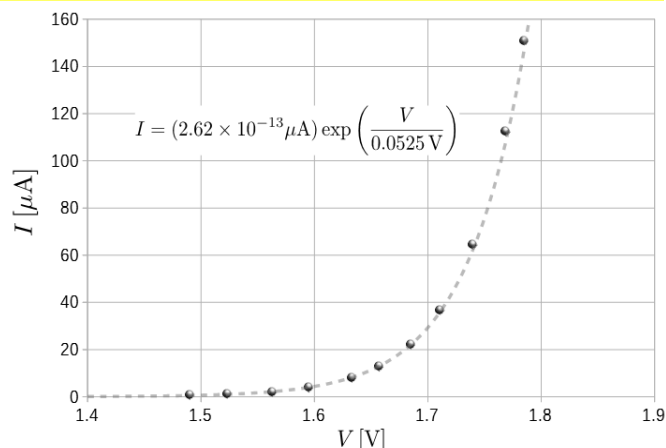


図 7 LED の電流・電圧特性 (非発光領域: 正規)

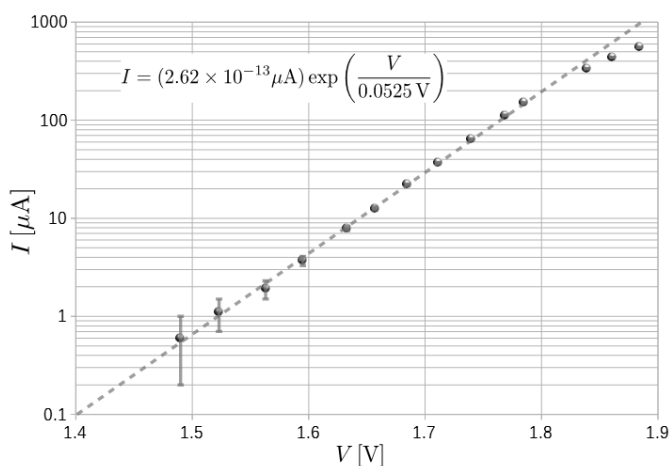


図 8 LED の電流・電圧特性 (非発光領域: 片対数グラフ)

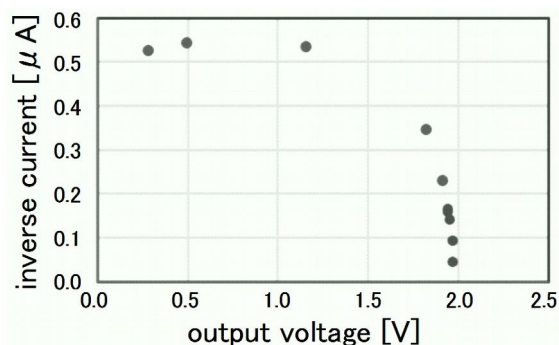


図 9 受光時の特性

実験 6 同種 LED のあいだでの発光・受光による光電流の測定 (2 人で共同実験)

ふたつの同種 LED を内直径 $5\text{ mm}\phi$ のストローにさして向かい合わせる。一方を 20 mA (この電流の値が入力できない場合は可能な最大の電流とする) で一定の発光状態にしておく。もう一方のカソード・アノード間に DMM を接続し、抵抗 R ($0.56, 1.0, 2.7, 10, 33\text{ M}\Omega$ あるいは可変抵抗) から適当な抵抗を短絡接続する。可変抵抗の中間抵抗値はその都度測定する。抵抗を外して $R \rightarrow \infty$ としてもよい。DMM の内部抵抗を考慮しながら、受光側の LED が出力する電圧と電流の関係をグラフにし、ほぼ一定の電流出力がなされていることを確かめる。さらに、発光側と受光側を反転させてもほぼ同じ結果が得られることを確認する。また、受光による光起電力の向き、および出力電流の向きについて、実態図を描きながら説明する。LED に当たる外部の光を遮ると特性が変化するかどうかを確認し、変化する場合は遮光すること。

実験 7 (発展的追加課題) 異種 LED のあいだでの発光・受光

異種 LED のあいだで同様の発光・受光を行う。発光側と受光側を反転させた場合に同じ結果が得られかどうかを調べる。

〔設 問〕

1. 実験2の式 $\frac{V_2}{V_1} = \frac{r_2}{r_1} + r_2 \frac{1}{R}$ を導きなさい。

2. 実験3で実験中に定義した開始電圧はLEDの温度や周囲の明るさの関係によって変わりうる。そこで、実験4や5で得られた広い範囲での電流・電圧特性を正規グラフに表し、曲線が立ち上がる直前と直後の部分を直線で近似して、それらの直線の交点として、実用的な発光開始電圧を再定義しなさい。また、電流軸を対数に取り直して $\log_e I = aV + b$ の式によって直線近似し、係数 a を決定しなさい。この電流の機構が(1)キャリアの拡散と、(2)キャリア対の生成再結合の、一方だけが優勢であると仮定して、温度 T を決定しなさい。その値は妥当な値といえるだろうか。

3. 光の振動数 f は波長 λ と $f = c/\lambda$ の関係がある。ただし、 $c = 2.998 \times 10^8$ m/s は真空中での光の伝わる速さである。そして、振動数 f の光は電子ひとつに対して一定量のエネルギー hf を与えたり奪ったりすることができる。ただし、 $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J·s はプランク定数と呼ばれる定数である。エネルギー量 hf は光のエネルギーの最小単位であり、これを光子という。各LEDの出す光について、光子1つのエネルギーをJ単位で求めなさい。また、それらが電子に渡されたとき、電子は ΔV の電圧差を乗り越える分のエネルギーをもつとして、その電圧 ΔV の値(あるいはエネルギーを電子ボルト単位で表した値)を求めなさい。前問2. で得られた実験結果としての発光開始電圧を、ここで得られた ΔV と比較し、その関係を論じなさい。

4. LEDを発光させるときに電源からLEDに流れ込む電流の向きと、受光して光起電力を生じるときに流れ出す電流の向きの関係、および、発光させるために外部から印加する順方向電圧と、受光したときに生じる光起電力の向きの関係について整理しなさい。この結果は、電気回路から外部へ光となってエネルギーが出て行くときと、外部から光のエネルギーが電気回路に渡されるときでは、電圧が反転せずに電流が反転したことを示すはずである。これはなぜなのだろうか。いいかえれば、電流が反転せずに電圧が反転することが起こらないのはなぜだろうか、考察しなさい。

〔参 考〕 半導体のP-N 接合

1. 真性半導体

ケイ素やゲルマニウムは1原子あたり4つの価電子があり、隣接する原子とはふたつの価電子を共有して結合している。この価電子は、室温等で熱的なエネルギーを受け取るとふたつの原子の束縛から逃れて自由に動き、伝導電子となる。絶対零度のような低温では熱的エネルギーを得ることがないので、伝導電子はなくなり、全ての価電子状態が充満している。このことを、空間に広がる価電子の分布だけを図示すると図10のようになる。また、これらの状況を、電子が持つエネルギーを縦軸にとって図示すると図11のようにかける。

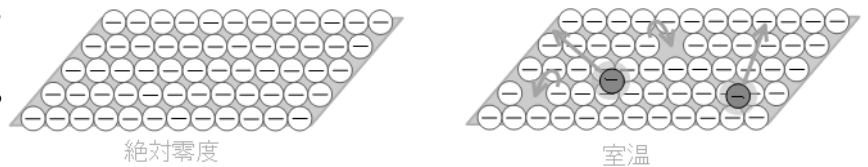


図 10

ただし、半導体では、運動エネルギー $K = \frac{1}{2}mv^2$ を持つ伝導電子ができるために、価電子はこれに加えて、ギャップ・エネルギーと呼ばれ

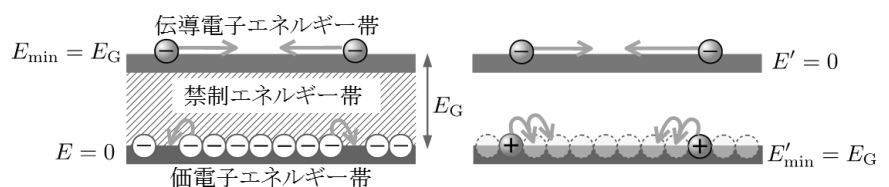


図 11

る値 E_G を加算した熱的エネルギーを必要とする。半導体はこの E_G が電子ひとつにとって、その電荷 $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{C}$ に電圧 $0.1 \sim \text{数 V}$ をかけた程度であり、室温でやり取りされる程度の熱エネルギーで励起が可能な物質である。

また、価電子が励起され、空席ができる。空席に隣接する原子の他の価電子が励起されてこの空席に入ること、空席は次々に移動できる。この空席は、相対的に正の電荷をもつものなので正孔(ホール)と呼ばれる。

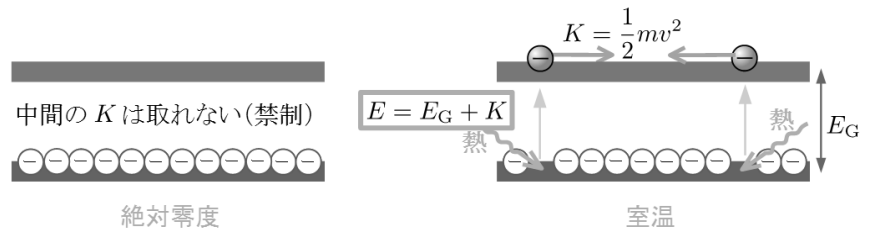


図 12

このように、室温等にある真性半導体の中の価電子が E_G 以上の熱的なエネルギーをもらうとき、伝導電子と正孔のペアが一組生成される。正孔が持つエネルギーは図 11 の左端のように、下向きに大きくなるように示す。また、伝導電子や正孔がとるエネルギーの値には幅があるので、これをエネルギー帯(エネルギー・バンド)という。上図では、ケイ素やゲルマニウムの価電子エネルギー帯(価電子帯という)の最上部と、伝導電子エネルギー帯(伝導帯という)の最下部を示している。これらのあいだにはさまれたエネルギーは禁制であるといい、この幅のことを禁制帯という。

2. 不純物半導体

ケイ素 Si やゲルマニウム Ge (価電子を4個もつ) のなかに、わずかな量の不純物を混入させると、その不純物原子の周りだけ価電子が減ったり増えたりする。母体としてのケイ素やゲルマニウムの伝導電子や正孔は、不純物によって (E_G 程度の熱的なエネルギーなしに) 導入される。

(1) 窒素 N, リン P, ヒ素 As, アンチモン Sb をケイ素 Si やゲルマニウム Ge 中に混入させると価電子5個をもつ。これらの原子は周囲のケイ素やゲルマニウムより陽子が一つ多く、相対的に1価の陽イオンとみなせる。これらの不純物原子の最外殻電子のエネルギーは高く、開放されて伝導電子になる(不純物原子は相対的な陽イオンになる)ために必要な励起エネルギーはわずかである。このような不純物半導体を N 型という。

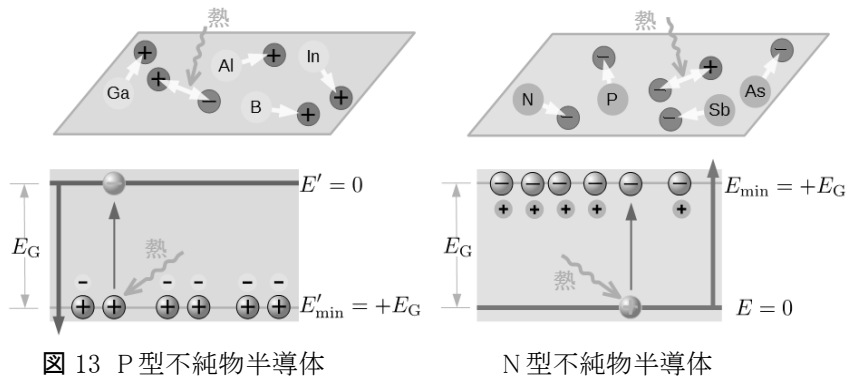


図 13 P 型不純物半導体

N 型不純物半導体

(2) ホウ素 B, アルミニウム Al, ガリウム Ga, インジウム In はケイ素 Si やゲルマニウム Ge 中では価電子3個をもつ。これらの原子は周囲のケイ素やゲルマニウムより陽子が一つ少なく、相対的に1価の陰イオンとみなせる。これらの不純物原子(相対的な陰イオン)の最外殻の空席にケイ素やゲルマニウムの価電子が入るために必要な励起エネルギーはわずか、これを正孔としてみると、これらの不純物原子から開放された正孔になる(不純物原子は相対的な陰イオンになる)ために必要な励起エネルギーはわずかである。このような不純物半導体を P 型という。

不純物の濃度はある程度多いので、いずれの不純物半導体でも熱的に励起される伝導電子や正孔のペアの数は無視できる。P 型では正孔が不純物原子に束縛されるとき、また、N 型では伝導電子が不純物原子に束縛されるとき、運動エネルギーがゼロになる。これらの P 型と N 型の不純物半導体を接合して正孔や伝導電子がそれらの両方を往来できるようにしたものを、P-N 接合という。外部と接続されていないダイオードでは、P-N 接合面付近の領域では次のような状況になっている。

- 両側のキャリアが引き合って接合面に流れ込み、再結合して消滅するため、キャリアの空乏層ができる。
- キャリアの空乏層ではキャリアを供給する不純物(N型側では相対的な陽イオン、P型側では陰イオン)が露出し、陽イオンから陰イオンに向かう向きの電界 \vec{E} ができる。
- 接合面の向こう側はキャリア濃度が薄いので、キャリアが拡散して向こうへ流出するが、この電界 \vec{E} はそれを妨げる作用をもつ。向こう側に達するにはキャリアのエネルギーが一定値(拡散エネルギーあるいは built-in energy という) E_D 以上である必要がある。

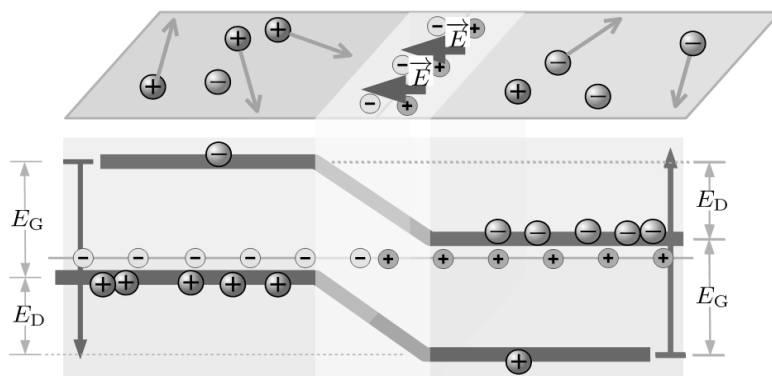


図 14 P型不純物半導体(左)とN型不純物半導体(右)の接合

P-N 接合面をはさんだP型側でもN型側でも、伝導帯の下端と価電子帯の上端のあいだのエネルギー・ギャップ E_G は変わらないが、伝導帯の下端と価電子帯の上端自体がP型-N型間で E_D だけずれる。

(1) キャリア拡散による電流

順方向に電圧 $V (> 0)$ を外から印加すると、これは外部電界として、P-N 接合でできた内部の電界 \vec{E} を弱め、伝導電子や正孔の拡散エネルギーは実質 $E_D - eV$ になる。これを乗り越えて接合面の向こう側へ拡散するキャリアの数は、キャリアの総数に対して $\exp\left(-\frac{E_D - eV}{k_B T}\right)$ に比例する割合になる。

(2) キャリア対の生成再結合による電流

接合面を超えた伝導電子あるいは正孔は、それぞれ周囲にある多数の正孔あるいは伝導電子に囲まれた少数のキャリアとして、衝突して再結合するまで平均的な寿命をもって存在し、消えていく。LED ではこのときに余剰のエネルギーを光として放出する。この光のエネルギーは E_G に等しいか、あるいは E_G よりやや小さい。この仕組みによる電流は、空乏層の幅や寿命の逆数に比例するほか、 $\exp\left(-\frac{E_G - eV}{2k_B T}\right)$ に比例する。

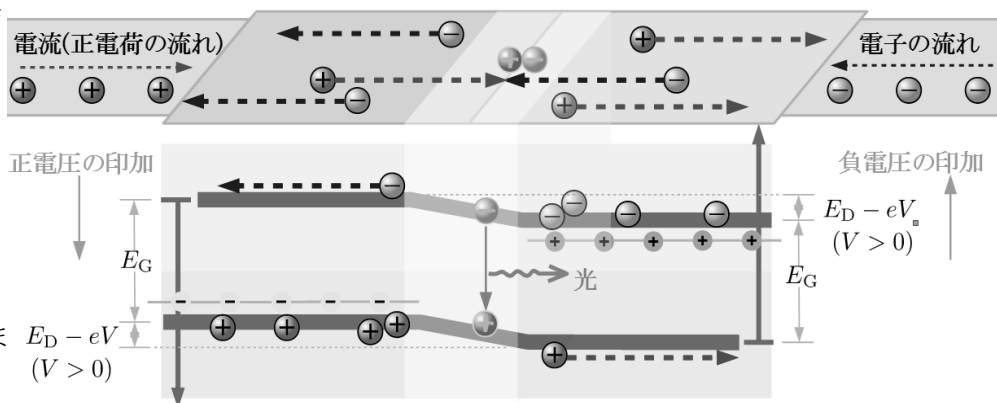


図 15 順方向電圧の印加時

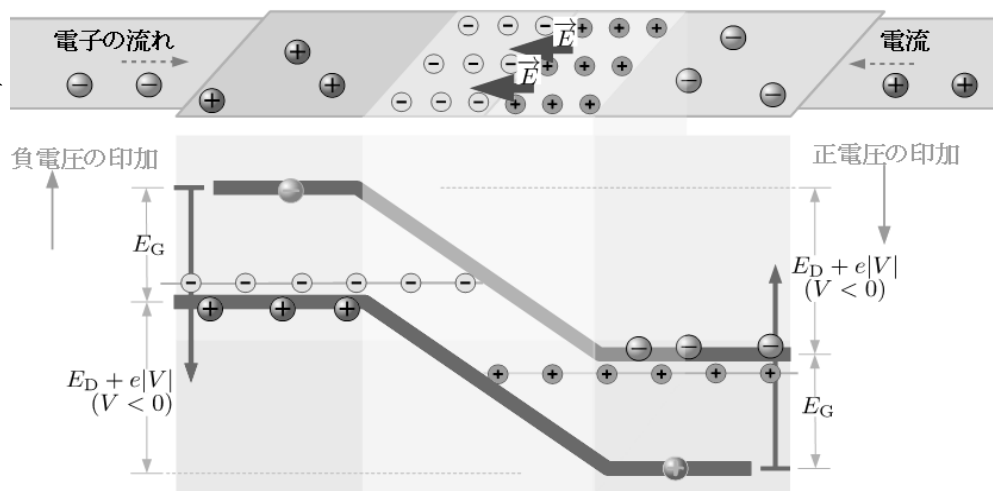


図 16 逆方向電圧の印加時

光の屈折

〔目的〕

光は一様な媒質中を直進し、異なる媒質との境界面で屈折すること、および光の進行する向きの変化は、境界面の法線から測った入射角・屈折角によって表すことにより簡単な数式(スネルの法則)で関係付けられることを確認する。

〔原理〕

図1に示すように、異なる透明物質 I, II の境界面に光を斜めから当てると、光は境界を通過するとき屈折するとともに、光の束の太さが変化する。このような屈折現象は、物質中の光の伝播速度(物質 I では v_1 、物質 II では v_2 とする)が異なることが関わっている。なお、光や音などの波動が物質のなかを進むとき、その物質は波動を伝える媒質と呼ばれる。

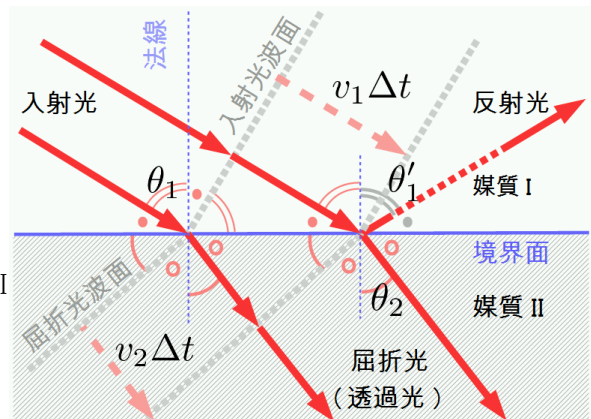


図1 光線の進行と Δt 秒間に進む距離

入射角 θ_1 と屈折角 θ_2 は図1のように、境界面の法線から測る角度として定義される。入射角 θ_1 が大きくなると屈折角 θ_2 も大きくなるが、それらのあいだには

$$\sin \theta_1 = n \sin \theta_2 \quad \dots(1)$$

という関係が成り立つことが知られている。これをスネルの屈折の法則といい、 n を媒質 I に対する物質 II の相対屈折率という。式(1)は $\theta_1 \rightarrow 0$ のとき $\theta_2 \rightarrow 0$ となること、すなわち、垂直入射では光は向きも太さも変化しない、という内容も含んでいる。この法則は、同位相となるべき「波面」の向きが変わった結果として説明される。また、波面はホイエンスの原理における「素元波」から説明される。

なお、真空中の光波の伝播速度を c として、媒質 I, II の絶対屈折率(あるいは単に屈折率)はそれぞれ $n_1 = c/v_1$ 、 $n_2 = c/v_2$ で定義され、式(1)は $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ とあらわされる。媒質 I に対する媒質 II の相対屈折率は $n = n_2/n_1$ である。媒質 I が空気の場合 $n_1 = 1.0003$ であり、 $n \approx n_2$ としてよい。

ほとんどの物質では絶対屈折率が 1 より大きく、また液体や固体であれば空気に対する相対屈折率は $n > 1$ が成り立つ。つまり、空気からこれらの媒質へ光が入射するとき、光の経路は境界面から遠ざかるように屈折する。逆に、これらの媒質から空気へと光が出ようとするときには、相対屈折率は $n < 1$ を満たす。

相対屈折率が $n < 1$ のとき、光の経路は境界面に近づくように屈折するため、屈折角 θ_2 が 90° に達することがある。このとき屈折光は境界面上に進む。屈折の法則(式(1))において $\theta_2 = 90^\circ$ を与える θ_1 (入射角)を臨界角と呼び、 θ_C で表す。臨界角より大きな入射角では全ての光が反射する。これを全反射と呼ぶ。光ファイバーの中を伝わる光がファイバーの表面にあたる時光が空气中に漏れて出ないのは、そこで全反射を起こすためである。臨界角で入射する光は $\theta_1 = \theta_C$ 、 $\theta_2 = 90^\circ$ を満たすので、式(1)は

$$\sin \theta_C = n \quad \dots(2)$$

となる。なお、空気の屈折率を $n_{\text{air}} \approx 1$ 、ファイバー等の媒質の屈折率を n_{media} として、式(2)の相対屈折率は $n = n_{\text{air}}/n_{\text{media}} \approx 1/n_{\text{media}}$ であることに注意する。

ふたつの媒質の境界面で光が屈折するときには、必ず同時に反射も起こる。反射角 θ'_1 も境界面の法線から測った角度として定義され、これは入射角と等しく、 $\theta'_1 = \theta_1$ が成り立つ。これを**反射の法則**という。

さらに、反射光と屈折光が直交する関係にあるとき ($\theta'_1 + \theta_2 = 90^\circ$ のとき)、入射した光がもつふたつの偏光成分のうち、**反射光はひとつの成分の偏光だけになる**ことが知られている。このときの入射角を θ_B と書き、**ブリュースター角**と呼ぶ。このときの屈折の法則は、ブリュースター角を用いて $\sin \theta_B = n \sin(90^\circ - \theta_B) = n \cos \theta_B$ とかけるので、ブリュースター角 θ_B は次式を満たす。

$$\tan \theta_B = n \quad \dots(3)$$

[装置]

鉄板(鉄板)、半導体レーザー(WENTAI LM-101-A, 中心波長 650 nm, 出力 1 mW 以下)、光源用電源(1.2 V 電池 2 本, 電池ケース)、リード線、半円柱プリズム型容器、水、全円分度器、分度器位置決めマグネット(フェライト磁石, 3 個)、磁石・クリップつきスクリーン、関数電卓。

[注意] レーザー光は光のエネルギー密度が高いため、目に入ると網膜を損傷する危険性がある。ポインターに使用されるような小型で携帯が可能なレーザーは出力が小さく、CLASS1 であればひとの目に入ったとき、通常のままばたきをする嫌悪反応により影響は残らないとされるが、**自分および他人の目に入らないように注意**をしなければならない。PDL 基礎物理実験では、レーザー光線が進むのは机(鉄板)上 1 cm 程度の高さである。この高さに目を置くような観察は行わないこと。また、レーザー光線が反射により進路を変えることにも注意し、**レーザー光の進路に鏡となるものを入れない**こと。

光線には広がりがあることを意識し、中央の強度最大の角度を読むこと。

[実験方法]

1. 全円分度器と分度器位置決めマグネットを図2のように鉄板上に配置する。分度器とマグネットの間は分度器がなめらかに回転できる隙間を確保しつつ、位置のぶれが生じないように、最小限の隙間とする。

2. 半導体レーザーを鉄板に貼り付け、分度器の中心の真上にスクリーンを置いて、光線が分度器中心の真上を通過するように光線の向きを調整する。また、分度器の目盛りは、レーザーが 0 度から入射し 180 度から出て行くようにする。

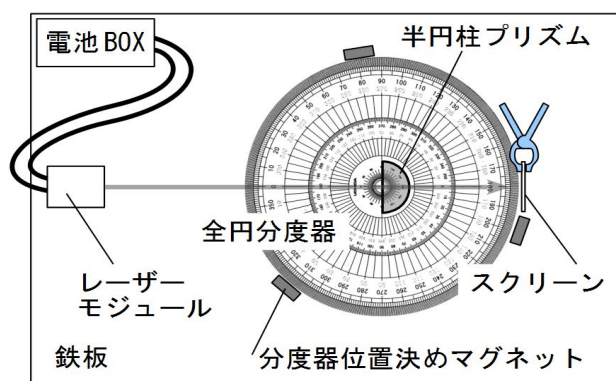


図2 鉄板上での各部品の配置

3. 半円柱プリズム型容器に 7 割ほど水を注ぎ、図2のように分光器の中心に載せる。このとき、次の点に注意し、ずれが目視でわかる場合には載せ直すこと。

- プリズム側面の平面部が分度器の中心直上にある
- プリズム側面の円筒部の中心が分度器の全円分度器の中心と一致する。

4. 入射角 θ_1 を $\theta_1 = 50, 40, \dots, 10, 0$ に設定して屈折角 θ_2 を測定する。その後、 $\theta_1 = 60, 70, 80$ で θ_2 を測定する。角度を変えるときには全円分度器に半円柱プリズムを乗せたまま、ずれないように注意して分度器を回す。このとき、分度器を時計回りに角度 θ_1 回すと、プリズムに対するレーザー光の入射は反時計回りに傾く ($-\theta_1$ 度回転する)。プリズムに入射した光は側面の円筒部に垂直にあたればそこでは屈折せず直進する。この透過光は、分度器の目盛上で $180 - \theta_2$ 度に進む。さらに、入射面 (プリズム側面の平面部) で反射光が $+\theta_1$ 度に進むことも確認する。得られた結果は付録に示す sin-sin グラフ用紙に記入して(あるいは関数計算シグラフ化して)屈折の法則に従うことを確認しながら、数値を表にまとめる。

6. 式(1)に従い、各 (θ_1, θ_2) に対する屈折率を求め、その平均として水の屈折率を求める。

[設問]

1. ホイヘンスの原理から、図 1, および、スネルの屈折の法則を説明しなさい。
2. $x = \sin \theta_2$, $y = \sin \theta_1$ として実験結果を最小二乗法により $y = nx$ の回帰直線にあてはめて係数 n を決定しなさい。ただし、残差の二乗和 $S = \sum_i (y_i - nx_i)^2$ が最小になる条件から $\sum x_i (y_i - nx_i) = 0$ が成り立ち、これを解くなどして最確値 \bar{n} および誤差 Δn が

$$\bar{n} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}, \quad \Delta n = \sqrt{\frac{N \sum (y_i - \bar{n} x_i)^2}{(N-1) \{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2\}}}$$

として得られる。データをこれに代入して水の屈折率 $n = \bar{n} \pm \Delta n$ を求めなさい。

2. 各測定 θ_{1i}, θ_{2i} には角度の読み取り誤差がある。自分で行った測定ではこれが何度くらいであったかを考え、これを $\delta \theta_1 = \delta \theta_2 = \delta \theta$ [rad] として評価しなさい。屈折率への伝播誤差 δn はこれを用いて

$$\delta n = \sqrt{\frac{1}{\tan^2 \theta_1} + \frac{1}{\tan^2 \theta_2}} \times n \delta \theta$$

で与えられる。たとえば $\theta_1 = 45^\circ = \pi/4$ [rad] に対し $\theta_2 = \sin^{-1} \left(\frac{1}{\bar{n}} \sin \theta_1 \right)$ から $n = \bar{n} \pm \delta n$ を求めよ。

[参考]

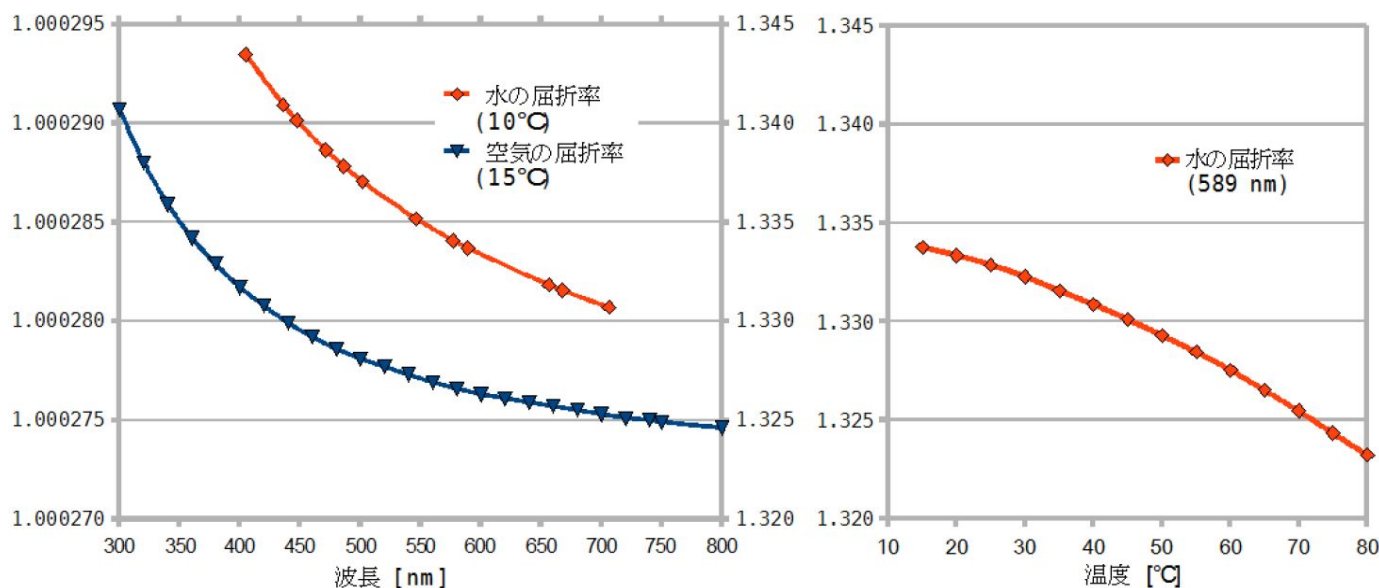


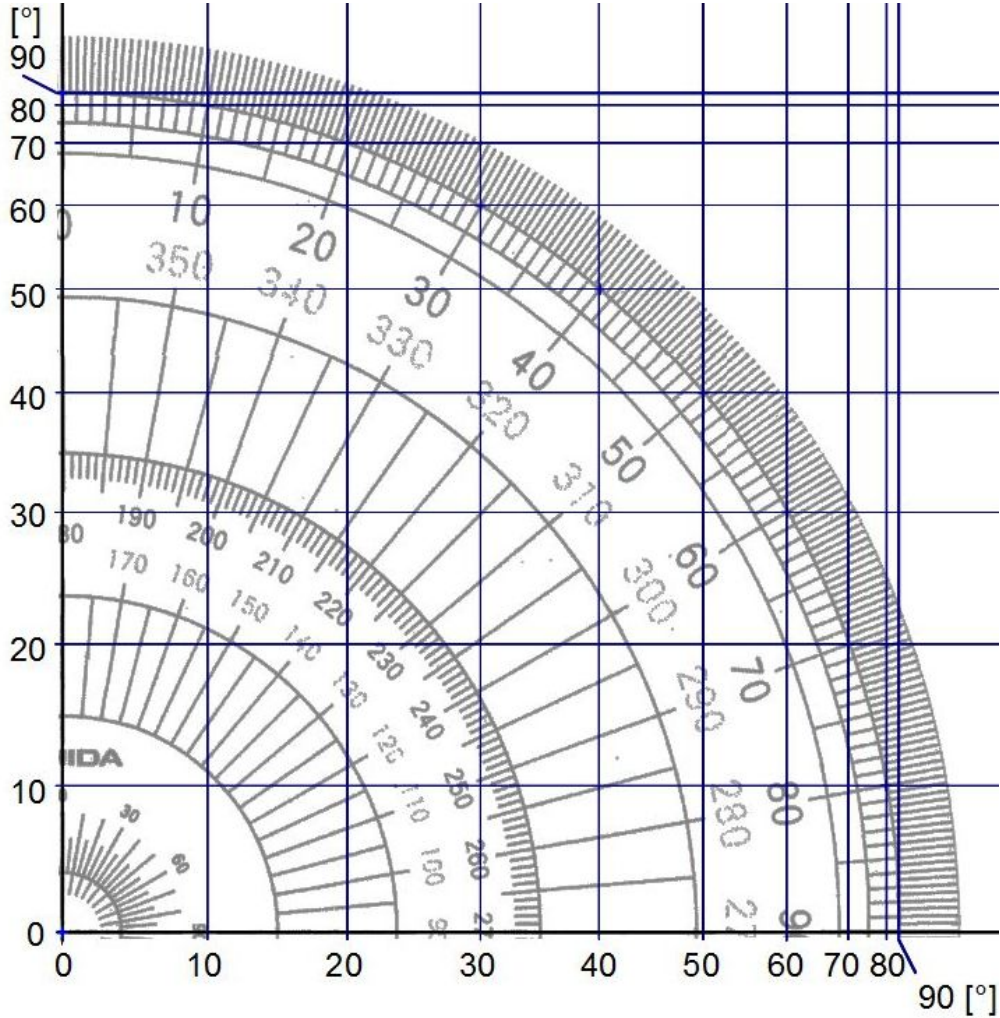
図 3 10°C の水と 15°C の空気における屈折率の波長依存性 (分散), 文献: 『改訂 4 版 化学便覧 基礎編II』 p.515, 日本化学会編, 丸善。

図 4 波長 589 nm の光に対する水の屈折率の温度依存性, 文献: 『物理定数表』 p.115, 飯田ほか著 朝倉書店。

水の屈折率は光の波長にわずかに依存して変化するが、20°Cで波長 656.3 nm における文献(理科年表)の値は $n = 1.331$ である。

[付 録]

sin-sin グラフ用紙

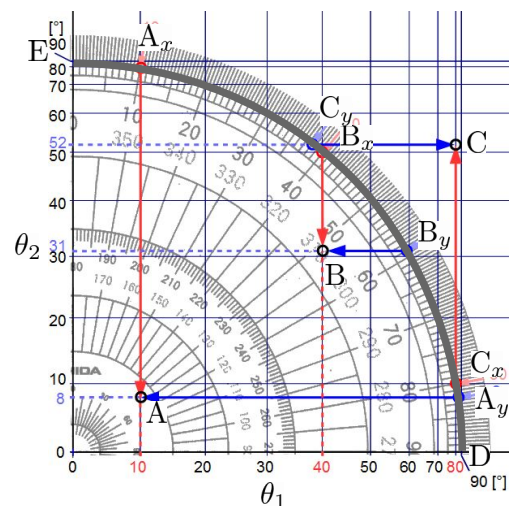


使い方

横軸 (x 軸) を θ_1 , 縦軸 (y 軸) を θ_2 とする。ひとつの円(※)の上で、縦軸 (y 軸) から角度 $\theta_1 = 10^\circ$ の位置を探して点 A_x とし、点 A_x を通って縦軸 (y 軸) に平行な補助線 ($A_x A$) を引く。横軸 (x 軸) から角度 $\theta_2 = 8^\circ$ の位置を探して点 A_y とし、点 A_y を通って横軸 (x 軸) に平行な補助線 ($A_y A$) を引く。

これらふたつの補助線の交点が $\theta_1 = 10^\circ, \theta_2 = 8^\circ$ の点 A の位置を与える。右図にはこのほか、 $\theta_1 = 40^\circ, \theta_2 = 31^\circ$ の点 B と、 $\theta_1 = 80^\circ, \theta_2 = 52^\circ$ の点 C も例として示している。

※ 右図では $\theta_1 = 90^\circ, \theta_2 = 0^\circ$ の点 D と、 $\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 90^\circ$ の点 E を通る太い線にとった。



光の偏光性

〔目的〕

1. フォトダイオードを用いた光の強度測定法を習得する。
2. 光の偏光性について実験を行い、理解を深める。

〔原理〕

光はその進行方向に垂直な方向に向く電磁場が振動しながら伝わっていく横波である。白熱電球や太陽からくる直接の光(自然光)では光の電場や磁場は、進行方向に垂直な面内で 360° のうちいろいろな方向を向いている。このような光波を偏光フィルターに通すと、フィルターの透過軸方向にのみ電場が向く光(直線偏光)だけが透過する。この様子は簾(すだれ)を通して隙間に平行な振動成分だけが伝わるありさまに似ている。偏光の様子は直線偏光を再び偏光フィルターに通すことによって調べられる。1枚目の偏光フィルターを偏光子、2枚目のそれを検光子と呼ぶ。これらを透過する波の振幅は偏光子を通った光の振幅のうち、検光子の透過軸に平行な成分だけであり、これらの透過軸がなす角を ϕ とすると $\cos \phi$ に比例する。光の強度は振幅の2乗に比例するので、入射光強度を I_0 とすると透過光強度 $I(\phi)$ は

$$I(\phi) = I_0 \cos^2 \phi \quad \dots(1)$$

となる。本実験では ϕ を変えて $I(\phi)$ を測定し、この関係が成り立つかどうかを調べる。

〔装置〕

鉄板(光学台として)、半導体レーザー(WENTAI LM-101-A, 中心波長 650 nm, 出力 1 mW 以下)、偏光子・検光子(プラスチックケースのふたと底に装着済み)、フォトダイオード(PDと略記, 浜松ホトニクス S1787-08), PD用並列抵抗(1 k Ω), デジタル電圧計, リード線。

〔注意〕 レーザー光は光のエネルギー密度が高いため、目に入ると網膜を損傷する危険性がある。ポインターに使用されるような小型で携帯が可能なレーザーは出力が小さく、CLASS1であればひとの目に入ったとき、通常のままたたきをする嫌悪反応により影響は残らないとされるが、**自分および他人の目に入らないように注意**をしなければならない。PDL基礎物理実験では、レーザー光線が進むのは机(鉄板)上 1 cm 程度の高さである。この高さに目を置くような観察は行わないこと。また、レーザー光線が反射により進路を変えることにも注意し、**レーザー光の進路に鏡となるものを入れないこと**。

光の強度測定では測定されるべき光以外の、室内の光がセンサーに入らないように注意が必要である。**頭上からの明かりは遮光シートで覆えば防ぐことができるが、水平な反射光は防ぐことが難しい**。窓際、白い壁の近く、また、人の出入りのある扉の近くでは、特に水平な反射光が入り難い向きにセンサーを向けるように配慮すること。

PD用並列抵抗は複数の種類が用意されている。本実験では光が強く、抵抗を間違えるとセンサー出力が飽和し、光強度に比例する出力が得られずにグラフが歪むことがあるので、注意すること。

〔実験方法〕

1. 実験器具を図1のようにセットして、レーザー光を偏光子(プラスチックケースの底)と検光子(プラスチック

ケースのふた)を通過させ、その透過光をPDの受光部分にあてる。偏光子を直線偏光にした後、PDには光の強度 I に比例した電流が流れるので、これを並列抵抗に流して電圧に変換し、デジタル電圧計で読み取る。検光子がとり付けられているケースのふたには1周95個の刻み目がついている。この刻み目で2.5個分($\sim 9.4737^\circ$)ずつふたを回転させながらPDの電圧を測定し、記録していく。38回の回転で1周し、 ϕ は元の値に戻る。

2. 測定結果をグラフ化するため、横軸を刻み目の数、縦軸をPDの電圧として測定値をプロットする。最大をとる角度を中心にグラフが重なるように用紙を折り返し、その中心に $\phi = 0$ がくるようにずらしながら、横軸に角度 ϕ の目盛りを追加せよ。さらに、測定結果に対する式(1)の理論値を計算で求め、データのグラフ上でプロットして比較し、理論曲線が測定結果のグラフに重なることを確かめる。 I_0 はグラフ全体の縦軸の大きさを与えるパラメータで、電圧の最大値だけでなく、より多くの部分で決めるのが望ましい。なお、後述する[参考]の方法を用いれば、位相原点 $\phi = 0$ の位置やグラフの縦軸のパラメータ I_0 を最小二乗法により決めることもできる。

[注意] 半導体レーザーの光は少し偏光しているため、光源側の偏光子は固定し、検光子のみを回転させること。

[設問] 上記の注意が必要な理由を述べよ。

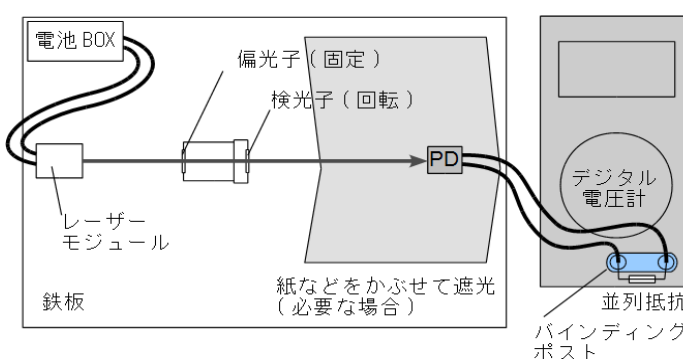


図1 実験装置の配置(偏光)

[参考] モデル曲線の係数:

$k = 0, 1, 2, \dots, N (N = 38)$ とし、 y_k を測定強度とする。ただし、 y_0 と y_{38} の平均を改めて y_{38} とし、 $k = 0$ は使わない。 $\delta = 4\pi/N$ とし、実験したときの位相のずれを $\alpha/2$ とおくと、実験結果 y_k があてはまるモデル式 $y(k)$ が

$$y(k) = I_0 \cos^2 \left(\frac{k\delta + \alpha}{2} \right) = \frac{I_0}{2} \{ \cos \alpha \cdot \cos(k\delta) - \sin \alpha \cdot \sin(k\delta) + 1 \}$$

と書ける。これを $y(k) = a \cos(k\delta) + b \sin(k\delta) + c$ と置き換えると、これらの係数 a, b, c は、残差二乗和

$$S = \sum_{k=1}^N \{ a \cos(k\delta) + b \sin(k\delta) + c - y_k \}^2 \text{ が最小となる必要条件 } \left(\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial S}{\partial b} = \frac{\partial S}{\partial c} = 0 \right) \text{ と、}$$

$\sum \cos(k\delta)^2 = \sum \sin(k\delta)^2 = \frac{N}{2}$, $\sum 1 = N$, $\sum \cos(k\delta) = \sum \sin(k\delta) = \sum \cos(k\delta) \sin(k\delta) = 0$ の関係から

$$a = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N y_k \cos(k\delta), \quad b = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N y_k \sin(k\delta), \quad c = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N y_k$$

と定まる。実験結果をこれらの式に代入して得られた係数 (a, b, c) 、あるいは

$$\frac{I_0}{2} = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \Delta y = c - \sqrt{a^2 + b^2}, \\ \alpha = \tan^{-1} \left(-\frac{b}{a} \right), \text{ ただし、} a < 0 \text{ のときは } \alpha = \tan^{-1} \left(-\frac{b}{a} \right) + \pi$$

と書き換えた係数 $(I_0, \alpha, \Delta y)$ を用いて、式

$$y(k) = a \cos(k\delta) + b \sin(k\delta) + c, \quad \text{あるいは、} \quad y(k) = I_0 \cos^2 \left(\frac{k\delta + \alpha}{2} \right) + \Delta y$$

が、実験結果に最もフィットする理論曲線を与える。背景の光や測定誤差により $\Delta y \neq 0$ となることがある。

光の回折

[目的]

光の波動性の証拠となった二重スリットによる干渉現象を観察し、見かけのスリット間隔と干渉縞の間隔の逆比例関係を定性的に確認する。

単スリットが作る回折像を観測し、その強度分布を理論曲線と対比しながら光の波長を求める。

[背景: ヤングの実験]

太陽の白色光はプリズムによって屈折するときさまざまな色に分解され、反射では分かれぬ。そのような色についての探求や、反射望遠鏡の作成、ニュートン・リングと呼ばれる干渉縞の研究も含めて、光線の性質を深く研究した¹のはニュートンである。ニュートンは微積分、力学、重力などの理論の構築のほかにも多くの実験的発見をしていて、科学界に圧倒的な影響力をもっていた。そして、一様な媒質の中を直進することからニュートンは光の本質を粒子だ考えた。この説が広まって、光の本質が波動であるとするホイヘンスの説²などを圧倒していた。

これに対して光の本質が波動であることを決定的に示したのが、1804年頃にヤングによって行われた実験、すなわち、二重スリットによる光の干渉である。その後も粒子説が主流な中、フランス科学アカデミーによる懸賞論文(1818年)として提出されたフレネルの波動理論をもとに、審査員のポアソンが予想し、同じく審査員のアラゴが実証した回折現象(円板の背後の輝点)が確認され、波動論が定着していった。

[原理(1): 二重スリットによる光の干渉]

二重スリットによる光の干渉は、ふたつのスリットを通った水波の干渉(図1)と同じ原理で説明できる。観測する位置を点Pとしてスリットから点Pまでの径路長を r_1 , r_2 とするとき、両スリットから来る波が重なった結果は波長 λ と径路長の差 $\Delta L = |r_1 - r_2|$ により次のようになる。

径路差 $\Delta L = |r_1 - r_2|$ が 波長 λ の整数倍であれば強めあう
波長 λ の半奇数倍であれば弱めあう

観測点Pはひとつの平面(スクリーン)上にあるとし、観測平面とスリットの間の距離を D とする。観測平面上の点Pの位置はスリット正面を基準とする座標 y で表し、これは

$$y = D \tan \theta \quad \dots(1)$$

と書くことができる(図2)。

一方、径路差 ΔL はその原因となるスリット付近の配置を拡大してみれば(図3)、点Pから見た「見かけのスリット間隔」 b を使って

$$\Delta L = b \tan \theta \quad \dots(2)$$

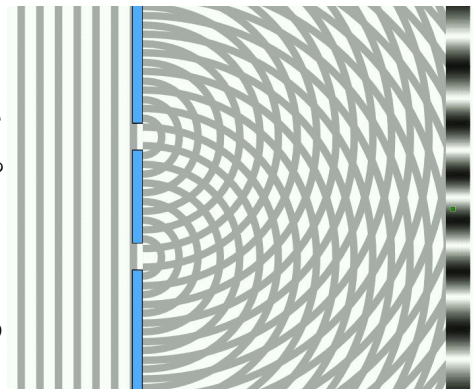


図1 二重スリットを通る波の回折

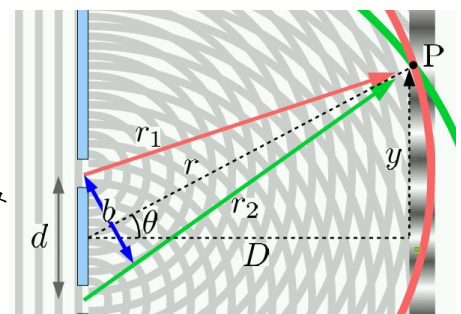


図2 座標等の定義

1 ニュートン「光学」(原書 1721 年, 島尾永康訳 岩波文庫 1983 年)。

2 ホイヘンス「光についての論考」(原書 1690 年, 安藤正人ほか訳 朝日出版社 1989 年)。

と表すことができる。さらに、「見かけのスリット間隔」 b はスリット間隔 d を用いて

$$b = d \cos \theta \quad \dots(3)$$

と書ける。式(2)と式(3)から、径路差は

$$\Delta L = d \sin \theta \quad \dots(4)$$

で与えられる。角度 θ が小さい範囲では次式が成り立つ。

$$\Delta L = d \frac{y}{D} \quad \dots(5)$$

なお、入射光の波面に対し、スリットを傾けて置く場合を考える。この傾斜角を ϕ とすれば、実際のスリット間隔を d' として

$$\text{式(2)は} \quad \Delta L_2 = b \tan(\theta + \phi), \quad \dots(6)$$

$$\text{式(3)は} \quad b = d' \cos(\theta + \phi) \quad \dots(7)$$

で置き換えられ、これとスリットへの入射光の径路差 (図4の中の $\Delta L_1 = d' \sin \phi$) を加味することにより、ふたつのスリットを通過して点Pに到来する光の径路差は、式(4)を

$$\Delta L_2 - \Delta L_1 = d' (\sin(\theta + \phi) - \sin \phi) \quad \dots(8)$$

で置き換えたものになる。角度 θ が小さい範囲では次式が成り立つ。

$$\Delta L_2 - \Delta L_1 = d' \cos \phi \frac{y}{D} \quad \dots(9)$$

ここで、 $d' \cos \phi$ は式(5)における d に相当することになる。

[原 理(2): 単スリットによる光の回折]

スリットには幅がある。それを通過する波の干渉・回折³を考えるとき、いろいろな波は重なっても互いに変化をもたらすことなく、自在に重なったり分かれたりできるという「**重ね合わせの原理**」という性質を使って、**波を分割してから合成すること**を考えよう。

スリットを仮想的に細分化し、どのスリット断片を通るかに対応して波を細分化する。それらはスリットのどこを通過するかによって径路に違いがあるため、スリット通過後に重なり合うときに干渉する。スリットに限らず、波を遮るものの境界の近くでは干渉現象が見られることがある。**遮蔽体の影がくっきりと見えるべきところで、境界に沿った干渉縞が影の外側や内側に見えるのである。**いろいろな径路をとる波の間で起こった重なり合いは、強めあう場合もあれば、弱めあう場合もある。逆に、波の一部を遮蔽して干渉を妨害すれば、それだけで波が弱くなる場合もあれば、強くなる場合もある。ここでは、細分化された光がスリット断片のどこを通るかという形で径路の違いが限定されている場合を考える。

なお、光によって起こる干渉を観察するには、**レーザー光のようなコヒーレントな(可干渉性の高い)光を使うか**、スリットやピンホールのような狭い穴(開口)を透過した(空間的なコヒーレンスを高めた)単色光(水銀ランプなど)を使うのが良い。一般の太陽光や白熱電球の光の干渉性はきわめて小さく、狭い間隙($\sim 10 \mu\text{m}$ 程度)の中だけでの干渉⁴でなければ観察できない。

³ 重ね合わせによって強めあいや弱めあいを起こすふたつの波は「干渉」という。同じ原理であっても、幅のある開口を通るなど、細分化した波の径路が連続的であって、重なり合う波が無数にあることを考える場合は「回折」と呼ぶことが多い。

⁴ ニュートン・リングでは磨かれた二枚のガラス板の間に $\sim 10 \mu\text{m}$ 程度の間隙があり、自然光の干渉が見える。

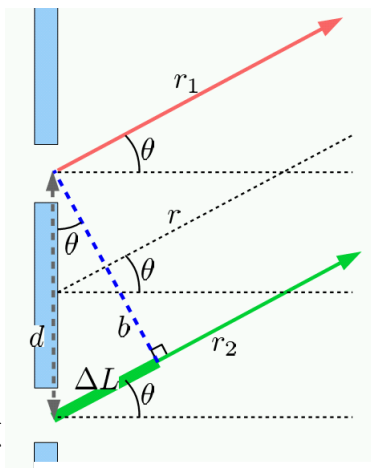


図3 スリット付近の拡大図

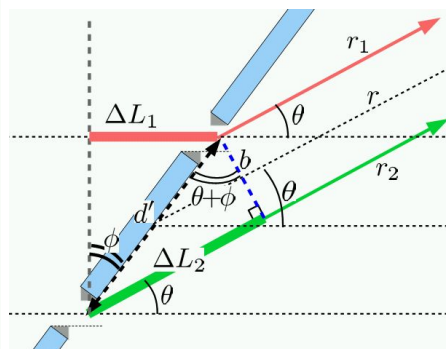


図4 スリットが傾いている場合

ここでは単スリットに対して垂直に光の束を入射するものとする。観測点 P はひとつの平面(スクリーン)上にあるものとし、観測平面とスリットの間の距離を D とする。点 P の位置はスリット正面を基準とする座標 y , あるいは式(1) すなわち $y = D \tan \theta$ の関係を与える角度 θ で表す(図5)。

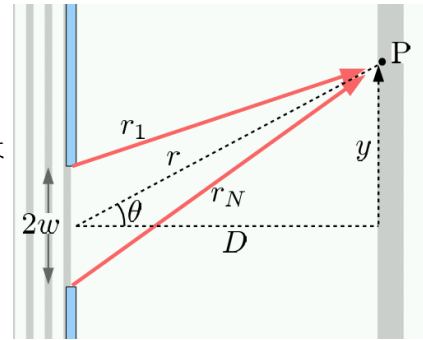


図5 座標等の定義

○スクリーン上で光強度が最小になる場所(暗線)の条件

図6はスクリーン中央に最も近い「1次の暗線」, 図7はそのスリット付近の拡大図である。スリットの上端 S_0 と中央 S_1 の径路差($r_{A1} - r_{A0} = w \sin \theta_A$)がちょうど半波長のとき, S_0 より少し下を通る光線と, S_1 より少し下を通る光線とのあいだもちょうど半波長の径路差になる。こうして, 上半分(S_0 - S_1 間)の光線はすべて, 下半分(S_1 - S_2 間)の光線とペアになって弱めあう。したがって, 1次の暗線の角度 θ_A は次式で与えられる。

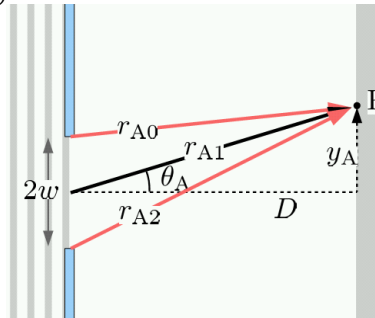


図6 1次の暗線の位置

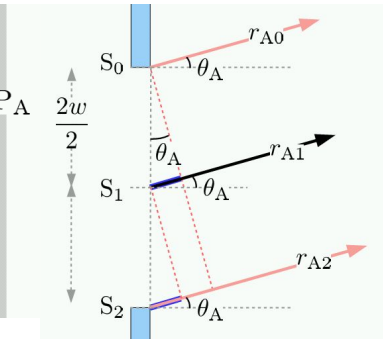


図7 図6のスリット付近

$$2w \sin \theta_A = \lambda \text{ (1 次の暗線)} \cdots (10)$$

同様に, 図8は「2次の暗線」, 図9はそのスリット付近の拡大図であるが, これらは, S_0 - S_1 間の光線と S_1 - S_2 間の光線, また, S_2 - S_3 間の光線と S_3 - S_4 間の光線がそれぞれ半波長の径路差のペアになって弱めあう場合である。2次の暗線の角度 θ_B は次式で与えられる。

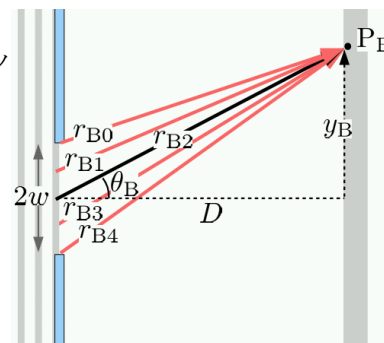


図8 2次の暗線の位置

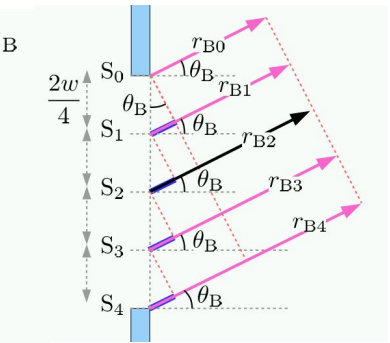


図9 図8のスリット付近

$$2w \sin \theta_B = 2\lambda \text{ (2 次の暗線)} \cdots (11)$$

これらから推測できるように, n 次の暗線の角度を $\theta_{(n)}$ (y 座標を $y_{(n)}$)と書けば, これは次式を満たす。

$$2w \sin \theta_{(n)} \left(= \frac{2w}{D} y_{(n)} \right) = n\lambda \text{ (} n \text{ 次の暗線, ただし, } n \text{ はゼロ以外の整数)} \cdots (12)$$

○スクリーン上での光の強度分布を与える理論式

スリット上(境界 S_0, S_N を含む)に $N + 1$ 個の点を考え, 点 S_i ($i = 0, 1, 2, \dots, N$)とする。図10, 図11, 図12として, それぞれ, N の大きさが小さい場合, 中くらい, ととても大きい場合, の三つに分けて図を示した。隣接するふたつの点 $S_{i-1} \sim S_i$ に囲まれたひとつのスリット断片を通る光は, ひとつの(i 番目の)光線で表す。このような光線は N 本あり, それらがスリットに入射したときには同じ強さ・同位相で到来し, スリットを通過したあと, 観測点 P へと達して重なり合う。スリットから観測点 P までの距離はスリット断片の位置によってわずかに異なり, その差(径路差)があるために干渉が起こるが, 細分化された光が点 P に到達したときの光波の強さ(振幅)は N 個すべて同じであるとみなすことにする。

スリット幅を $2w$ とおくと, 細分化されたスリット断片の幅は $\frac{2w}{N}$ であり, 隣接するスリット断片を通過して観測点 P に届くふたつの径路には $\frac{2w}{N} \sin \theta$ の差がある。波長 λ の光ではこれに $\frac{2\pi}{\lambda}$ をかければ位相差になる。

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{2w}{N} \sin \theta \quad (N \text{ 分割したスリットの隣接区間を通るふたつの光線が, 観測点 P に達したときの位相差}) \cdots (13)$$

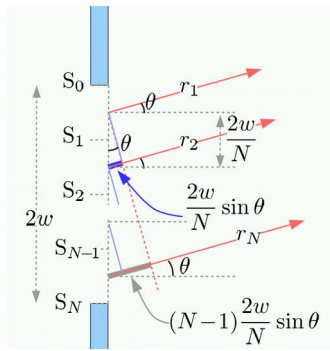


図 10 少ない N 個での分割

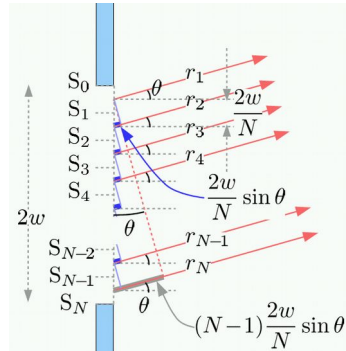


図 11 中程度の N 個での分割

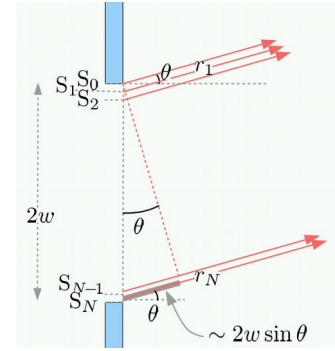


図 12 大きな N 個での分割

こうして問題は、振幅が同じで位相が一定のずれ(式(13)で与えられる δ)をもつ N 個の波を重ね合わせた場合の強度を求め、 $N \rightarrow \infty$ にすることに帰着する。式の導出は[付録]に示し、ここでは観測点 P の位置を $\theta (\ll 1 \text{ rad})$ により $\sin \theta \sim \tan \theta$ あるいは y で与える場合の強度 I の式を示す(関数形は図 13 を参照)。

$$I = I^{\max} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad \text{ただし, } \alpha = \frac{N\delta}{2} = \frac{2\pi w}{\lambda} \sin \theta \sim \frac{2wy}{\lambda D} \pi \quad \dots (14)$$

[装置]

鉄板(光学台として), 半導体レーザー(WENTAI LM-101-A, 中心波長 650 nm, 出力 1 mW 以下), スリットつきフォトダイオード(PD と略記, 浜松ホトニクス S1787-08), PD 用並列抵抗(100 kΩ), デジタル電圧計, バインディングポスト, リード線, 微動機構つきノギス, 二重スリット(シートのみ), 単スリットつきナット(固定用磁石つき), ビニルテープ, 簡易顕微鏡, ライトボックス(別名:トレース台, バックライト, ビューワー), 透明プラスチックものさし, マイクロメーター。

[注意 1]

指先の油脂等は石鹼で洗浄して落とし、水分も拭ってから実験を行うとともに、スリットには指で触れないこと。

レーザー光は光のエネルギー密度が高いため、目に入ると網膜を損傷する危険性がある。ポインターに使用されるような小型で携帯が可能なレーザーは出力が小さく、CLASS1 であればひとの目に入ったとき、通常のままにやる嫌悪反応により影響は残らないとされるが、自分および他人の目に入らないように注意をしなければならない。PDL 基礎物理実験では、レーザー光線が進むのは机(鉄板)上 1 cm 程度の高さである。この高さに目を置くような観察は行わないこと。また、レーザー光線が反射により進路を変えることにも注意し、反射によりレーザー光の進路を変える場合はじゅうぶん注意すること。

光の強度測定では測定されるべき光以外の、室内の光がセンサーに入らないように注意が必要である。頭上からの明かりは遮光シートで覆えば防ぐことができるが、水平な反射光は防ぐことが難しい。窓際、白い壁の近く、また、人の出入りのある扉の近くでは、特に水平な反射光が入り難い向きにセンサーを向けるように配慮すること。

この実験ではスリットつき PD を用いることで開口幅を狭くし、位置に関する変化をとらえやすくしている。その分、受光強度が弱くなるが、PD 用並列抵抗を大きくし、測定可能な出力電圧にしている。PD 用並列抵抗は複数の種類が用意されているので、抵抗を間違えないように注意するとともに、最大光量のときの測定数値が 3 桁以上あることを確認すること。

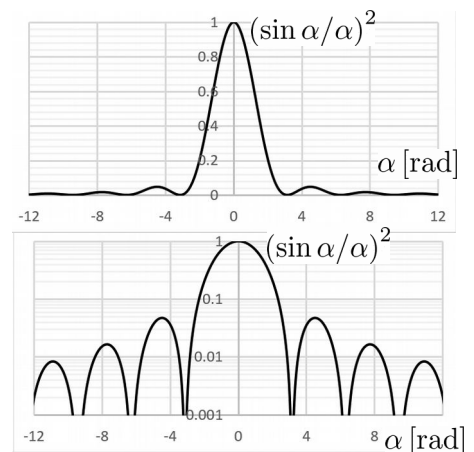


図 13 式(14)の関数形の正規プロット(上)と対数プロット(下)

〔実験方法〕

1. トレース台を点灯させ、その上に二重スリット(シートのみ)を載せる。簡易顕微鏡を用いてスリット幅(= $2w$)とスリット間隔(= d)を測定する。同様に、トレース台上に単スリットつきナットを倒して載せ、スリット幅(= $2w$)を測定する。スリット面がナットの上面になるように置くこと。ひとつの部品に単スリットがふたつ刻んであるが、**実験で使用するのは狭いほうの単スリット**とする。なお、簡易顕微鏡は観察しているスリット像と顕微鏡内のスケールとの、両方の焦点を合わせ、また、スリット像の両側がスケールと垂直になるように配置して、スリット幅をスケールにより読み取る。

注:スリットにゴミが付着していると干渉縞が生じ強度ムラができて、測定ミスの原因となるので、顕微鏡下で十分観察するとともに、見つかったゴミはエアでゴミを吹き飛ばすか、洗浄して乾燥させる。

2. 二重スリットのシート厚さをマイクロメーターによって読み取る。二重スリットをビニルテープで単スリットつきナットに固定する。ナットに接着されている磁石で、二重スリットが鉛直に立つように注意する。

注:ビニルテープを剥がすときには二重スリットのシート(薄い鋼板)が変形しないよう、注意深く行うこと。

半導体レーザーから出た光が二重スリットに当たるように、実験器具を図14のように設置する。ただし、二重スリットのシート面をレーザー光に対して $\phi = 45^\circ$ くらいの角度に傾けて置く。スリットから20 cm~1 mほ

ど後方にスクリーン(白い紙)を置いて縞模様の回折パターンが出来ていることを確かめ、白い紙の上に回折パターンの形を記録する。同様に、 $\phi = 60^\circ$ や 30° , 0° 付近に対して記録をとる。スクリーン上で光が強めあう位置の y 座標が式(9)に従うこと(同じ暗線では y と $\cos \phi$ が反比例するなど)を定性的に確認する。

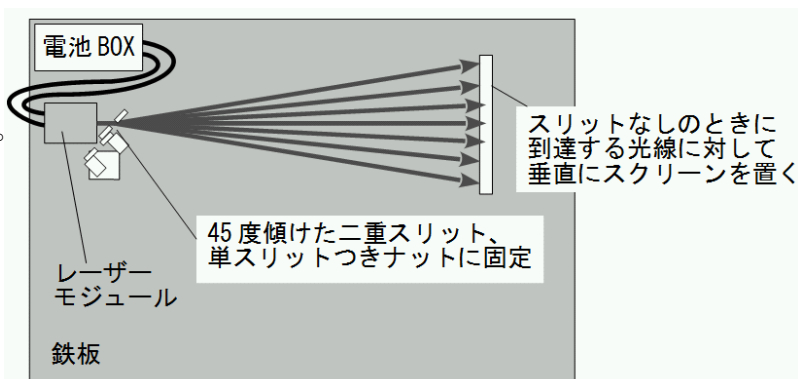


図14 二重スリットによる干渉実験

3. 図15を参照しながら、二重スリットの代わりに単スリットを、また、スクリーンの代わりにスリットつきフォトダイオード(PD)を可動部に取り付けたノギスを置く。ノギス可動部は微動機構の固定をしないおすことにより、任意の位置で微動移動することができる。可動範囲の中央(7.5mmの目盛り位置)と回折パターンの中央をおおよそ一致させること(そうしないと回折パターンの全体が測定できないことがある)。光の高さとPDの受光面の高さの調整のためにマグネットを重ねたり、板や紙をはさむことは可能だが、固定がゆるくならないように注意すること。ノギス可動部の位置を y' として、これを0.2 mm 間隔でずらしながら、光強度 I の分布を測定する。

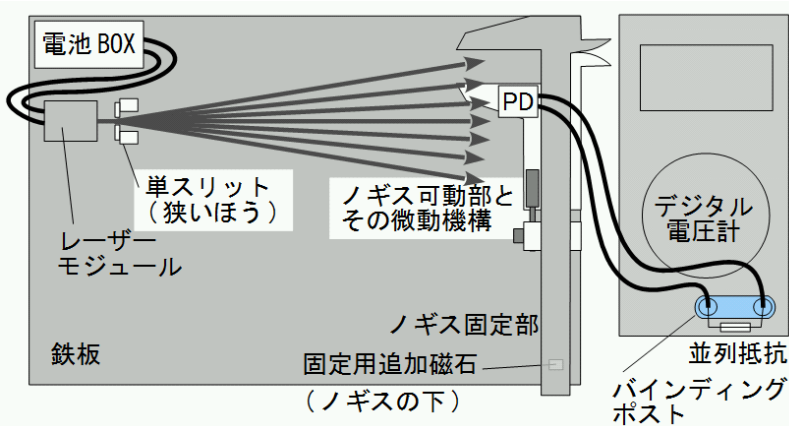


図15 単スリットによる回折実験

ノギスの読み取り y' に対して測定結果 $I(y')$ をグラフに描き、その中央を y'_0 , 暗線の位置を $y'_{(n)}$ を決める。一般に暗線の近くのピーク強度は弱いので、拡大した正規プロットあるいは対数プロットをすること。

式(14)によれば、暗線は $\frac{2w}{\lambda D}y = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ に現れる。したがって、

$$y'_{(n)} - y'_0 = \frac{\lambda D}{2w}n \quad (n \text{ はゼロ以外の整数}) \quad \dots (15)$$

が成り立つ。グラフから求めた値を用いて係数 $\frac{\lambda D}{2w}$ を決定し、本実験で用いた光の波長 λ を算出なさい。また、これらの値を用いて回折強度の理論値を求め、**実験データのプロットに理論曲線(式(14))を重ねて描きなさい。**

[注意 2]

測定した光強度は、PD に取り付けられたスリットの開口幅全体で受ける光強度の和である。単スリットと観測位置までが近い (D が小さい) とき、あるいは幅の広い単スリットを使うとき ($2w$ が大きい) には開口幅に比べて回折パターンは細かくなり、PD を移動させても変化は小さくなって、測定される回折パターンがぼけて、現象の特徴がわかりにくくなることになる。

[設問]

1. 二重スリットの扱いの中ではスリット間隔 d だけを扱い、スリット幅(それぞれ幅 $2w$ とし、 $2w < d$ である)を考慮しなかった。仮に、二重スリットをその片方だけを光が透過する単スリットで置き換えたとすると、暗線が現れる位置は二重スリットの干渉縞のどのような位置になるか。また、二重スリットを傾けた角度を大きくしていくとき、鋼板シートに厚みがある影響で、見かけのスリット幅 $2w'$ は正面から見たときの幅 $2w$ より狭くなる。実際に観察し記録した結果の中に、それに対応する特徴があればそれを説明しなさい。
2. スリットが小さな丸穴の場合、その回折像はどうなるか。丸穴の輪郭の外側と内側について述べなさい。

[付録]

振幅が同じで位相が一定のずれ δ をもつ N 個の波を重ね合わせた場合、合成波の振幅は

$$A = A_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad \text{ただし, } \alpha = \frac{N\delta}{2} \quad \dots (16)$$

で表されることを示す。波の強度 I は波の振幅 A の 2 乗に比例するため、式(14)は式(16)から導かれる。

図 7 や図 9 のように、すべての波は同じ方向に進行しているものとし、その方向を x 、波長を λ 、波の変位を z とする。このとき各波の変位は、同一の振幅 $\frac{A_0}{N}$ 、伝播速度 v を使って、位置 x と時間 t の関数として

$$z_1 = \frac{A_0}{N} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}[x - vt] + \varphi_1\right), z_2 = \frac{A_0}{N} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}[x - vt] + \varphi_2\right), \dots, z_N = \frac{A_0}{N} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}[x - vt] + \varphi_N\right)$$

と書くことができる。ただし、各位相定数には $\varphi_n = \varphi_0 + n\delta$ (ただし、 $n = 1, 2, \dots, N$) の関係がある。合成波の変位を z_{tot} とすると、これは各波の変位を足し合わせたものになるので

$$z_{\text{tot}} = \sum_{n=1}^N \frac{A_0}{N} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}[x - vt] + \varphi_0 + n\delta\right) = \frac{A_0}{N} \sum_{n=1}^N \sin(\psi + n\delta)$$

と書ける。ここで $\psi = \frac{2\pi}{\lambda}[x - vt] + \varphi_0$ とおいた。これは数学公式により

$$z_{\text{tot}} = \frac{A_0}{N} \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \sin\left(\psi + \frac{N+1}{2}\delta\right) \quad \dots (17)$$

と書き換えできる。さらに、 $N \rightarrow \infty$ では $\delta \rightarrow 0$ 、このとき $N \sin \frac{\delta}{2} \rightarrow \frac{N\delta}{2}$ となること、および $\frac{N\delta}{2} = \alpha$ と書き換えることにより、式(17)の振幅部分 $A_0 \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{N \sin \frac{\delta}{2}}$ は $A_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ となる。

磁場の性質(静磁場, 電流の作る磁場)

注意: 本実験では強力な磁石を用いて作業を行います。学生証をはじめ各種カードや切符などの磁気記録されたもの, PC, 携帯電話等の磁場に弱い精密機械に磁石を近づけないように注意すること。

実験の背景:

皆さんのまわりに満ちあふれている「磁場」。身近なはずなのに、意識したことはほとんど無いでしょう。冷蔵庫にくっつけているメモ留め磁石から、産業用強力磁石、そして地球も大きな磁石です。この磁石から出ている磁場にはどのような性質があり、磁場は他の物に対してどのような作用を及ぼすのか。色々な物を用いて実際に調べてみましょう。

実験1 磁場はめぐる $\text{div}\mathbf{B} = 0$

準備する道具: 磁場観察槽, 方位磁針1セット, 棒磁石2個, 強力磁石1個, ゼムクリップ, シャープペンシルの芯, 糸, 鉄板, 銅板, アルミ板, 目盛付プラスチック台, トレーシングペーパー

(1-1) 棒磁石のまわりの磁場の向き

- ・実験A: 磁場観察槽と方位磁針を用いて棒磁石の回りの磁場の分布と向きを調べ、トレーシングペーパーに写し取る。

磁場観察槽の微鉄針の方向は磁場の向きに平行で、濃淡は磁束密度の大きさにおおむね比例していることを考慮して、棒磁石の回りの磁場の分布の特徴を説明しなさい。

- ・実験B: 2つの棒磁石を取り囲む磁場の分布はどのようになるのか、実験前に各自予想して記録し、その後、実際に磁場分布を観察して記録する。2本の棒磁石の置き方は自由。

(1-2) 磁石に付くもの, 付かないもの, 反発するもの

- ・実験C: 色々なものが磁石に付く(引かれる)かどうか調べ分類しよう。

例: クリップ, コイン, 消しゴム, 紙幣, シャープペンの芯

⇒高感度に調べるためには: 調べるものを糸で釣り, 強力なネオジウム磁石を近づけてみる。

(1-3) 磁気遮蔽の原理(磁気シールド)

- ・実験D: 色々な材料の板で磁場が通るかどうか調べよう。

プラスチック板, 鉄板, 銅板, アルミ板を磁石の磁場が突き抜けているか磁場観察槽で

試す。磁場が板の裏側に現れないものはどのような材料の板か。また、なぜ裏側に現れないのか考察せよ。

$$\text{実験2 電流が作る磁場} \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{i}$$

磁場の発生源としてすぐに思いつくのは磁石(永久磁石)である。しかし、日常生活の様々な場面ではむしろ電流が作る磁場を利用した「電磁石」が広く用いられている。電流のまわりの磁場の分布はどのようになっているのだろうか。PDL実験で調べてみよう。

準備する道具:磁場観察槽, 方位磁針1セット, 棒磁石1個, コイルセット, リード線(赤2本, 黒2本),
電池ボックス入り電池(2個入り), ゼムクリップ, 輪ゴム, 目盛り付きプラスチック台
磁場センサー, グラフ用紙(2枚), テスター(DMT)またはオシロスコープ

(2-1) 1本の電線のまわりの磁場

・実験A: 電流を取り囲むように磁場が生じている事を, 電線の上や下に置いた方位磁針で確かめよ。

(2-2) 50 回巻いた円形コイルの磁場 (向き, 大きさ)

・実験B : 円形コイルに生じた磁場の向きと分布について, はじめに予想をたててレポートに書き,
次に実際に方位磁石と磁場観察槽を用いて調べ, スケッチする。コイルの電線の周囲に注意して観察すること。また, 電流の向きを変えると磁場の向きはどうか調べよ。

(2-3) 円形コイルの中心軸上の磁場分布 (大きさ)

・実験C: 円形コイルの中心軸上(z 軸)に生じる磁束密度の大きさを, ホール効果を用いた磁場センサーで計測して, 中心点からの距離 z に対するグラフを書く。電磁気学を用いて計算した磁束密度の距離依存性 $B(z)$ の計算値と比較する。

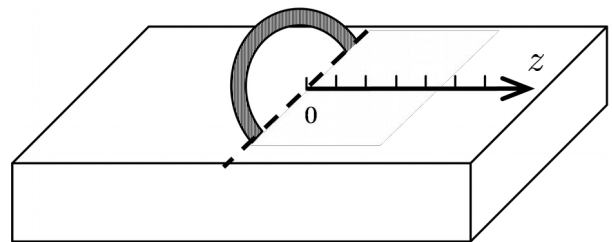


図 1

実験方法:

- (1) 50 回巻きコイルを上図のように方眼目盛りつき台に垂直に立てて, 輪ゴムで固定する。
- (2) 電池 1 個をコイルに接続する。このとき, テスターを電流が 10 A まで測定できるモードに切り替えてコイルに流れる電流を測定する。
- (3) 磁場センサーに電池をセットし, 電圧計測モードに切り替えたテスターでセンサー出力電圧を測定できるように準備する。
- (4) コイル中心軸に沿って, 中心 $z = 0$ から 1 cm ごとに磁場値を計測する。センサーには磁束密度 1 ガウス(= 10^{-4} T)あたり電圧 10 mV が生じる。
- (5) 実験で求めた距離と磁束密度との関係をグラフに書く。
- (6) それぞれの距離において理論から計算した磁場の値を表に書き込み, 実験結果のグラフに記号を変えて書き込む。

理論:ビオ・サバールの法則

図 2 のように、回路 C に流れている電流 I により観測点 $P(\mathbf{x})$ に生じる磁場(磁束密度)を $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ とする。

このとき $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ は式 1

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{x} - \mathbf{s})}{|\mathbf{x} - \mathbf{s}|^2} \quad \text{式 1}$$

のようにかける。ただし、 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ は真空の透磁率、 \mathbf{x} は観測点Pの位置ベクトル、 \mathbf{s} は回路 C 上の 1点を示す位置ベクトル、 $d\mathbf{s}$ はその \mathbf{s} 点における回路 C 上の微小ベクトルである。

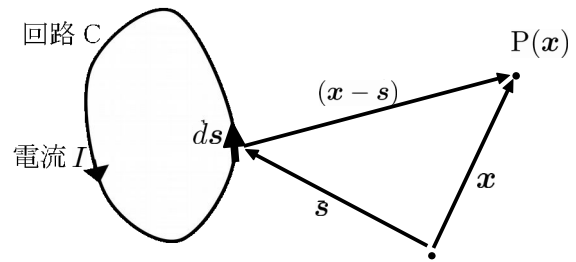


図 2

これを半径 a の円電流 I に当てはめて見よう。図 3 のように、円電流の中心軸上の距離を z とする。 $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{s}$ と $d\mathbf{s}$ は直交しているので、 $d\mathbf{s}$ の部分の電流による磁場を $d\mathbf{B}$ とすればこれは

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds}{r^2} \mathbf{e}_{(\perp r)}$$

とかける。ここで、 $d\mathbf{B}$ の向きを表す方向ベクトル $\mathbf{e}_{(\perp r)}$ は $d\mathbf{s}$ にも \mathbf{r} にも直交している。

この磁場の z 軸に垂直な成分 $dB \sin \alpha$ は円電流をひとまわり足し合わせることで打ち消し合う。したがって、円電流全体が作る磁場 $\mathbf{B}(z)$ は z 軸に平行であり、 $d\mathbf{B}$ の z 軸成分 $dB \cos \alpha$ をひとまわり積分すれば得られる。 $ds = a d\phi$, $\cos \alpha = |\mathbf{s}|/|\mathbf{r}| = a/r$ の関係を用いて、 $\mathbf{B}(z) = B(z)\mathbf{e}_z$ の大きさ $B(z)$ は

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{ds}{r^2} \cos \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a d\phi a}{r^2 r} = \frac{\mu_0 I a^2}{2 r^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

と書け、コイル(円電流)の z 軸上の磁束密度の大きさが与えられた。なお、特別な場合として原点 ($z = 0$) では、見慣れた値 $B = \frac{\mu_0 I}{2a}$ となる。この実験では、円形コイルの巻数が 50 回巻きなので電流は実効的に $50 \cdot I$ となることに注意すること。

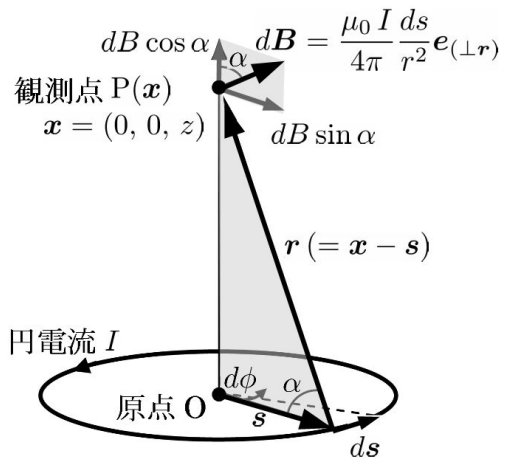


図 3

考察:円形コイルの作る磁場はどのような分布をしているか。何かに似ているか？

電気の世界では、+電荷や-電荷が存在し、+電荷から「電束」(電気力線)が湧き出して広がり、-電荷で吸い込まれている。また、一方の電荷だけ存在する場合でもその電荷から電束は広がっている。では、磁場も同様に考える事ができるのだろうか。実験(1)「磁場はめぐる」では、磁束はすべて途切れることなく永久磁石の周りに分布していることを見た。また、今回の電流が作る磁場も全く同様に電流を取り巻くように分布している。これは、磁場の世界に「磁荷」が存在しないことを示している。つまり、すべての磁場はある意味で「電流」により生じており、永久磁石も例外ではない。それでは、永久磁石の磁場はどのような電流により生じているのだろうか。考察してみよう。

実験3 磁場が作る電流 $\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$

実験2では電流が磁場を作っていることを調べた。では逆に、磁場が電流を作ることできるのだろうか。これを実験で確かめよう。

⇒ 実のところ、電池以外で「利用可能」な電気はそのほとんどが磁場を用いて作られている。

準備する道具：棒磁石 1 個，強力磁石 1 個，リード線（赤 1 本，黒 1 本），テスター，輪ゴム，
コイルセット，目盛り付きプラスチック台，オシロスコープ，交流発振器，
プラスチック定規

(3-1) 磁場により電流は発生するか？

- ・実験A1： コイル内に磁石を置いて静止させた後，コイルの電線にテスターをつないで，コイルに電圧（または電流）が生じているかどうか確かめよ。
- ・実験A2： コイルの電線にテスターをつないだままで測定値を監視しながら，コイル内から磁石を引き抜く。このときコイルに電圧が発生することを確認せよ。

(3-2) 磁場によりコイルに生じる電圧の性質。（向き，大きさ）

- ・実験B： 円形コイルに生じた電圧の大きさや向き（符号）は何で決まるのだろうか。
棒磁石の数を変えたり，動かす速度を変えたりなど思いつく限り色々試みてその特徴を調べよ。

(3-3) 考察 円形コイルに生じる「起電力」と誘導電流

磁場の変化によりコイルに生じた電圧を誘導起電力というが，どうしてこのような電圧がコイルに生じるのだろうか。普通，電線に電流を流そうとするときは，電池を使って「電圧（電位差）」を加える。すると単位長さ（1 m）当たりの電位差である「電場 \mathbf{E} 」が電線内に生じ，電子は電場から力（ $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$ ）を受けて運動し電流となる。導線で作られているコイルに電圧が発生したという事を素朴に考えると，磁場によりコイルの電線に沿って「電場」が生じ，それをコイルの電線に沿って足し合わせた値が「コイル全体に生じた誘導起電力」であると思われる。ただし，磁場が一定のときはコイルに電圧は生じなかったため，この誘導起電力の正体は，磁場が変化しているところのまわりには電場が発生するため生じるものと考えられる。今，図4のような 1 回巻きのコイルに磁石のN極を近づけたところ誘導起電力が生じて左の電極が+，右の電極が-となる電圧が生じたとする。このとき，コイルの左右の電極を電線でつなぐと，電流が流れるはずであるが，コイルにはどちら向きの電流が流れるだろうか。また，この電流が流れることによりコイルに生じる磁場の向きはどちら向きか考察せよ。

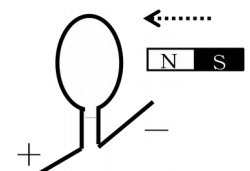


図 4

(3-4) 電磁誘導 変動する磁場が誘導起電力を生じさせることを確かめる。

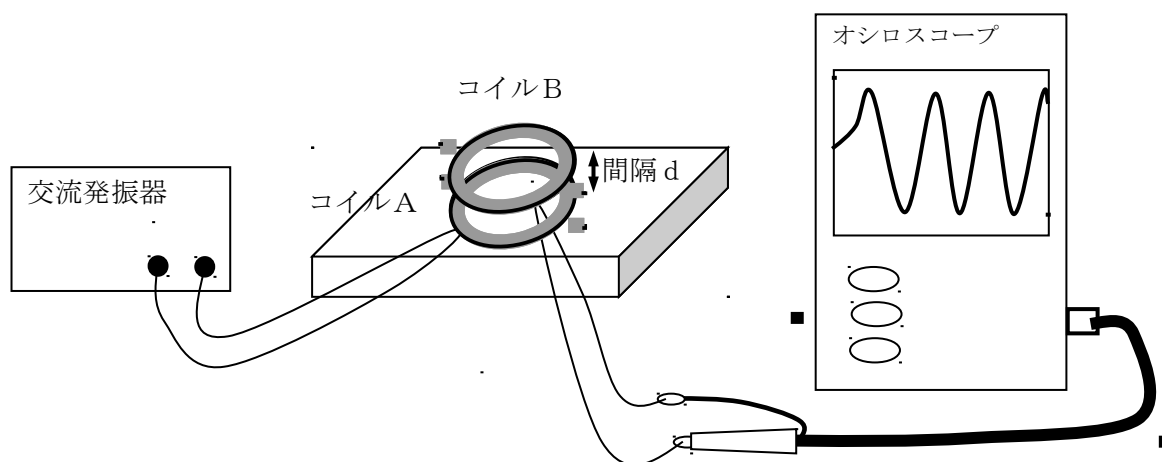
- ・実験C： 円形コイルを2つ（コイルA，コイルB）用意する。一方のコイルAに交流発振器から周波数 200 kHz 程度の交流電流を流す。もう一方のコイルBにオシロスコープを接続して，コイルBに発生する電圧を計測する。まず，プラスチック台の上に二つのコイルを重ねて置く。発振器の出力およびオシロスコープの電圧

感度, 時間軸を調整して, 電圧波形が明瞭に読みとれるようにセットする(交流の振幅が1V程度に調整すると良い)。

- 2つのコイルA, Bの間隔を離していくと, コイルBに現れる電圧はどのように変化するか。
- コイルBに現れる交流電圧が磁場により発生していることを調べるため, 磁気遮蔽で用いた鉄板, 銅板, アルミニウム板, プラスチック板を2つのコイルの間に挟んでみる。コイルBの電圧はどのように変化するか調べよ。

考察1: この結果と(1-3)で行った棒磁石の磁気遮蔽の実験結果と比較して考察せよ。

考察2: 磁石にくっつかない銅板やアルミ板で交流磁場が遮蔽される理由について考察せよ。



磁場PDL レポート 学籍番号・氏名

実験1 「磁場はめぐる」

- (1-1) 実験A：棒磁石のまわりの磁場を観察しトレーシングペーパーに写し取る。
磁場の向きや、分布の特徴をまとめて記せ。

実験B： 2つの棒磁石から広がる「磁束」を観察しよう。(方向、濃さ)

予想	実験結果

- (1-2) 実験C：いろいろな物の磁性（磁場に対する応答）を調べよう。
消しゴム、シャーペンの芯、硬貨、紙幣・・・ なんでも調べてみてください。

- ・磁石にくっつくもの _____
- ・つかないもの _____
- ・反発するもの _____

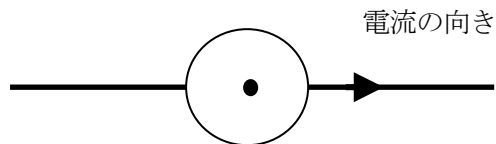
(1-3) 実験D：プラスチック板、鉄板、銅板で磁場が通るかどうかが調べよう。

- ・ プラスチック板 _____ アルミ板 _____
- ・ 鉄板 _____ () _____
- ・ 銅板 _____ () _____

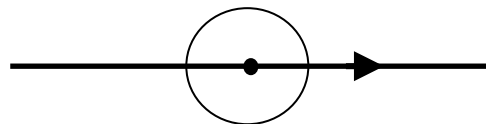
結局、どのようなものを使えば磁場を遮ることができるのだろうか。また、その材料ではなぜ裏側に磁場が現れないのか。簡潔にまとめて記せ。

実験2 電流がつくる磁場

(2-1) 実験A：電流を取り囲むように磁場が生じている事を、電線の上に置いた方位磁針で確かめる。

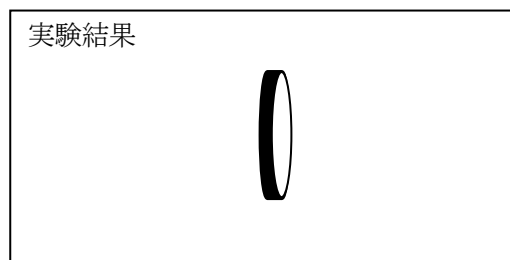
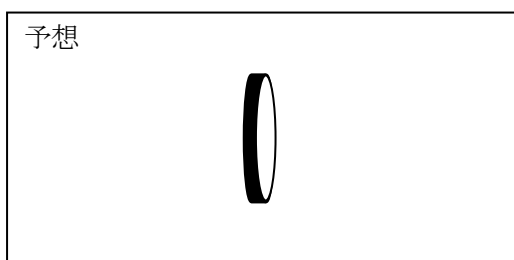


方位磁石を電線の上に置いた場合



方位磁石を電線の下に置いた場合

(2-2) 実験B1：円形コイルに生じた磁場の向きをスケッチする。

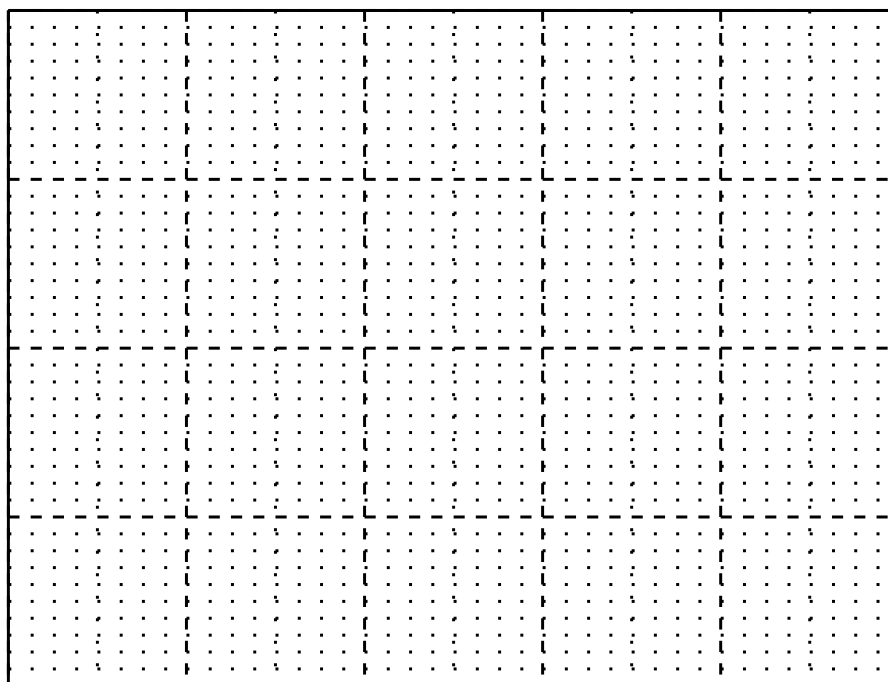


実験B2：円形コイルに流す電流の向きを変えると磁場の向きは_____

実験Bを磁場観察槽で観察してトレーシングペーパーに写したものを添付。

(2-3) 実験C： コイル中心軸上の磁場値 (1 cmごと) を計測および計算してグラフ化せよ

距離 z (cm)	磁場センサー出力	磁束密度 B (T)	計算値 B (T)



コイルの中心からの距離 r (cm)

考察： 永久磁石の磁場はどのような「電流」により生じているか考察せよ。

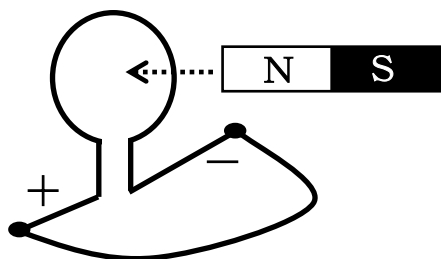
実験3 磁場がつくる電流

- (3-1) 実験A1：コイル内に磁石を置いた後、テスターでコイルに電流が流れているかどうか（または電圧が発生しているかどうか）確かめる。

実験A2：テスターで測定値を監視しながら、コイル内から磁石を取り出すとどうなるか。

- (3-2) 実験B：誘導起電力の性質を調べて気づいた点を簡潔にまとめなさい。

- (3-3) 考察： 図のように磁石を近づけると、コイルの電線をつなぐと、どの向きに電流が流れるか書き込み、その電流によりコイルに生じる磁場の向きを矢印で記入する。



- (3-4) 実験C：

- 2つのコイルA、Bの間隔を離していくと、コイルBに現れる電圧はどのように変化するか。
- 鉄板、銅板、アルミニウム板、プラスチック板を2つのコイルの間に挟んだときコイルBの電圧はどのように変化したか。棒磁石の磁気遮蔽の実験結果と比較して考察せよ。また、磁石にくっつかない銅板やアルミ板でも交流磁場が遮蔽される理由について考察せよ。